

## Уточнение материальных констант пьезокерамики ЦТС-19 при помощи акустического резонатора в виде диска

А. А. Теплых,\* Б. Д. Зайцев, А. М. Шихабудинов, И. А. Бородина  
Саратовский филиал Института радиотехники и электроники имени В. А. Котельникова РАН  
Россия, 410019, Саратов, ул. Зеленая, д. 38  
(Статья поступила 12.07.2017; Подписана в печать 18.09.2017)

В данной работе сделана попытка уточнения материальных констант для образцов из пьезокерамики ЦТС-19 в виде диска методом широкополосной акустической спектроскопии. При помощи прецизионного LCR измерителя был измерен комплексный электрический импеданс каждого резонатора в широком диапазоне частот. Затем была создана теоретическая модель резонатора при помощи двумерного осесимметричного метода конечных элементов. При помощи данной модели была решена обратная задача с использованием алгоритма Нелдера-Мида и вычислены уточненные значения всех 10 материальных констант пьезокерамики для каждого исследованного образца. Проведено сравнение уточненных значений со значениями, ранее опубликованными в литературе.

PACS: 43.20+g

УДК: 534-16.

Ключевые слова: дисковый пьезорезонатор, пьезокерамика ЦТС-19, материальные константы, алгоритм Нелдера-Мида.

### ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время из пьезокерамики изготавливаются множество типов акустических резонаторов, датчиков, излучателей и приемников ультразвука и т.д. Для моделирования всех этих устройств необходимо знание материальных констант пьезоэлектрических материалов, из которых они изготовлены. Пьезокерамика на основе цирконата-титаната свинца (ЦТС) является одним из наиболее распространенных и коммерчески доступных пьезоэлектрических материалов в настоящее время. Этот материал обладает весьма сильными пьезоэлектрическими свойствами и высоким значением диэлектрической проницаемости. Однако вследствие особенностей технологии получения этого материала его материальные константы, в особенности, пьезоконстанты, меняются в широких пределах от образца к образцу, в отличие от монокристаллических пьезоэлектриков. Кроме того, для этого материала характерно старение его свойств со временем, что приводит к значительному изменению его материальных постоянных. Все это приводит к необходимости измерять и корректировать материальные постоянные пьезокерамики при конструировании и изготовлении различных приборов на ее основе.

В данной работе сделана попытка уточнения материальных констант для трех образцов из пьезокерамики ЦТС-19 в виде дисков методом широкополосной акустической спектроскопии. При помощи прецизионного LCR измерителя был измерен комплексный электрический импеданс каждого резонатора в диапазоне 75–975 кГц. Затем была создана теоретическая модель резонатора при помощи двумерного осесимметричного метода конечных элементов. При помощи данной мо-

дели был вычислен комплексный электрический импеданс в том же диапазоне частот, при этом набор материальных констант для расчета был взят из литературы. Положения резонансных пиков на теоретических и экспериментальных зависимостях не совпали, что объясняется несоответствием материальных констант, использованных для расчета реальным материальным константам данного образца. Уточненные значения материальных констант были определены путем решения обратной задачи при помощи алгоритма Нелдера-Мида.

### 1. ИЗМЕРЕНИЕ ИМПЕДАНСА ПЬЕЗОКЕРАМИЧЕСКОГО РЕЗОНАТОРА В ВИДЕ ДИСКА

Пьезоэлектрические резонаторы, импеданс которых измерялся, были изготовлены из пьезокерамики ЦТС-19. Заготовки для резонаторов в виде цилиндров диаметром 20 мм и высотой 18 мм были приобретены в ООО «Аврора-ЭЛМА», г. Волгоград. Кристаллографическая ось  $Z$  пьезокерамики была параллельна оси цилиндра. От одного такого цилиндра были отрезаны три диска, толщиной около 2.5 мм. Затем торцы дисков были отполированы, при этом уделялось особое внимание, чтобы они были строго плоскопараллельны друг другу и перпендикулярны оси диска. В результате получились три круглых пьезокерамических диска со следующими характеристиками:

Затем вакуумным напылением на противоположные стороны диска были нанесены электроды из алюминия. Вектор напряженности электрического поля, создаваемого этими электродами, был параллелен оси диска и полярной оси  $Z$  пьезокерамики. К электродам с помощью проводящего клея «Silver Print» были приклеены золотые проволоки диаметром 25 мкм, которые позволили подключить резонаторы к прецизионному изме-

\*E-mail: [teplykhaa@mail.ru](mailto:teplykhaa@mail.ru)

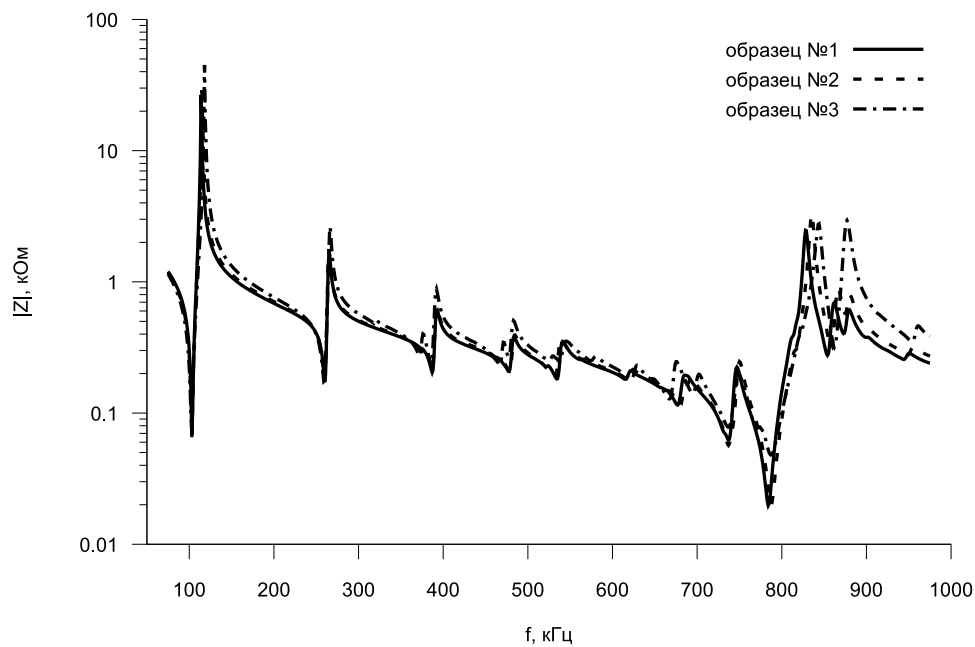


Рис. 1: Экспериментальные зависимости модулей электрического импеданса пьезорезонаторов от частоты

Таблица I: Размеры пьезорезонаторов

№ образца	Диаметр, мм	Толщина, мм
1	20	2.505
2	20	2.506
3	20	2.512

рителю LCR параметров (4285A Agilent Technologies, США). После этого для каждого резонатора были измерены частотные зависимости действительной и мнимой частей электрического импеданса в диапазоне 75–975 кГц с шагом 1 кГц. Результаты измерений показаны на рис. 1.

Как видно, в данном частотном диапазоне наблюдается 12 параллельных (максимумы импеданса) и последовательных (минимумы импеданса) акустических резонансов, соответствующих различным модам колебаний диска. Наблюдаемое различие в частотных зависимостях объясняется возможным разбросом материальных постоянных образцов пьезокерамики.

## 2. МОДЕЛЬ ПЬЕЗОКЕРАМИЧЕСКОГО РЕЗОНАТОРА В ВИДЕ ДИСКА

Рассмотрим задачу о вынужденных колебаниях круглого пьезокерамического диска. Геометрия задачи в цилиндрических координатах представлена на рис. 2.

Диск диаметром  $d$  и толщиной  $h$  изготовлен из пьезокерамики, принадлежащей к кристаллографическому классу 6mm. Ось поляризации керамики параллельна

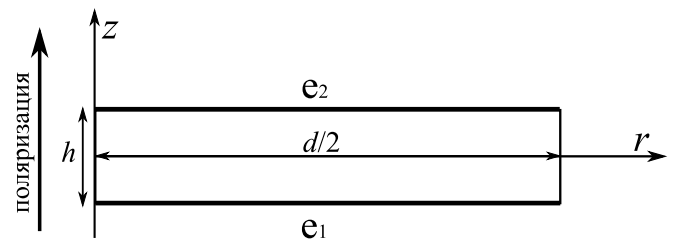


Рис. 2: Геометрия задачи. Диск получается вращением показанной фигуры вокруг оси  $Z$ .  $e_1$  и  $e_2$  — электроды

оси диска  $z$ . Металлические электроды  $e_1$  и  $e_2$  располагаются на верхней и нижней сторонах диска. Необходимо найти распределение акустического и электрического поля внутри диска[1]. В такой постановке задача является осесимметричной и становится двумерной (в координатах  $r$  и  $z$ ). Искомое решение может быть записано в виде:

$$\left. \begin{aligned} u_r &= u_r(r, z) \exp(I\omega t) \\ u_z &= u_z(r, z) \exp(I\omega t) \\ \varphi &= \varphi(r, z) \exp(I\omega t) \end{aligned} \right\}, \quad (1)$$

где  $u_r$ ,  $u_z$  — радиальная и аксиальная компоненты механического смещения,  $\varphi$  — электрический потенциал,  $I$  — мнимая единица,  $\omega$  — круговая частота. Таким образом, в задаче необходимо учитывать только четыре

компоненты деформации:

$$\{S\} = \begin{Bmatrix} S_{rr} \\ S_{\theta\theta} \\ S_{zz} \\ 2S_{rz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} & 0 \\ \frac{1}{r} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial r} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_r \\ u_z \end{Bmatrix} = [L_u] \{u\} \quad (2)$$

и две компоненты электрического поля:

$$\{E\} = \begin{Bmatrix} E_r \\ E_z \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \varphi = - [L_\varphi] \varphi. \quad (3)$$

В рассматриваемом двумерном осесимметричном случае из матриц материальных констант могут быть удалены некоторые строки и столбцы, и соответствующие матрицы могут быть записаны в виде:

$$[c] = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 \\ c_{12} & c_{11} & c_{13} & 0 \\ c_{13} & c_{13} & c_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} \end{bmatrix} (1 + I\omega\eta),$$

$$[e] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & e_{15} \\ e_{31} & e_{31} & e_{33} & 0 \end{bmatrix}, \quad [\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & 0 \\ 0 & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}.$$

Таким образом, материал резонатора характеризуется пятью модулями упругости  $c_{11}, c_{12}, c_{13}, c_{33}, c_{44}$ , тремя пьезоэлектрическими модулями  $e_{15}, e_{31}, e_{33}$ , двумя модулями диэлектрической проницаемости  $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{33}$ , плотностью  $\rho$  и скалярным фактором вязкости  $\eta$ . Задача описывается системой уравнений:

$$\left. \begin{aligned} -\omega^2 \int_V \rho \{u\}^T \{u\} dV + \int_V ([L_u] \{u\})^T [c] [L_u] \{u\} dV + \int_V ([L_u] \{u\})^T [e] [L_\varphi] \varphi dV &= 0 \\ \int_V ([L_\varphi] \varphi)^T [e] [L_u] \{u\} dV - \int_V ([L_\varphi] \varphi)^T [\varepsilon] [L_\varphi] \varphi dV &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

со следующими граничными условиями. На оси диска задано механическое граничное условие:  $u_r = 0|_{r=0}$ , остальная поверхность механически свободна. В области электродов явно задано значение амплитуды электрического потенциала:  $\varphi = V_1|_{z=-h/2}$ ,  $\varphi = V_2|_{z=+h/2}$ , остальная поверхность электрически свободна. Решение данной задачи методом конечных элементов позволяет вычислить электрический импеданс диска для заданной частоты и известных материальных констант.

### 3. УТОЧНЕНИЕ ЗНАЧЕНИЙ МАТЕРИАЛЬНЫХ КОНСТАНТ ПЬЕЗОРЕЗОНАТОРА

При помощи метода, описанного в предыдущем пункте, можно смоделировать резонатор, геометрия которого (диаметр, толщина, расположение электродов) точно повторяет экспериментальный образец. Плотность пьезокерамики была измерена в лаборатории и оказалась равна  $\rho = 7433 \text{ кг/м}^3$  для каждого образца. Фактор вязкости был определен из формы резонансной кривой по формуле

$$\eta = \frac{\Delta\omega}{\omega_{\max}^2}, \quad (5)$$

где  $\omega_{\max}$  – резонансная частота,  $\Delta\omega$  – ширина резонансного пика. Среднее значение для данных резонаторов  $\eta = 5 \times 10^{-9} \text{ с/рад}$ . Значения материальных констант пьезокерамики были взяты из литературы [2]. Положения резонансных пиков на теоретической и экспериментальной зависимостях не совпали,

что объясняется несоответствием материальных констант, использованных для расчета реальным материальным константам данного образца. Уточненные значения материальных констант были определены при помощи алгоритма Нелдера–Мида [3]. Целевая функция, которую минимизировал алгоритм, записывалась в виде:

$$F = \sqrt{\sum_{i=1}^n (\log |Z_i^e| - \log |Z_i^t|)^2}, \quad (6)$$

где  $|Z_i^e|$  и  $|Z_i^t|$  – измеренный и рассчитанный модуль импеданса на частоте  $f_i$ , соответственно,  $n$  – количество точек измерения. Преимущество выбранного алгоритма состоит в том, что он не требует вычисления производных минимизируемой функции. В результате работы алгоритма были получены уточненные значения материальных констант для каждого исследованного образца (табл. 2).

При использовании уточненных материальных констант все рассчитанные резонансные частоты отличались от измеренных менее чем на 1 кГц.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, в работы был предложен метод уточнения значений материальных констант пьезокерамики и были определены уточненные значения материальных констант для трех образцов пьезокерамики ЦТС-19 российского производства. Следует отметить, что

Таблица II: Уточненные значения материальных констант материала пьезорезонаторов

Константа	Литература	Образец № 1	Образец № 2	Образец № 3
$c_{11}$ , $10^{10}$ Па	10.9	11.14	11.43	11.67
$c_{12}$ , $10^{10}$ Па	6.1	6.51	6.67	7.25
$c_{13}$ , $10^{10}$ Па	5.4	6.42	6.57	6.77
$c_{33}$ , $10^{10}$ Па	9.3	10.55	10.51	10.50
$c_{44}$ , $10^{10}$ Па	2.4	2.16	2.18	2.05
$e_{15}$ , Кл/м <sup>2</sup>	10.6	8.34	9.16	8.65
$e_{13}$ , Кл/м <sup>2</sup>	-4.9	-3.07	-2.86	-3.24
$e_{33}$ , Кл/м <sup>2</sup>	14.9	13.34	13.84	13.82
$\epsilon_{11}/\epsilon_0$	820	710.4	687.4	438.6
$\epsilon_{33}/\epsilon_0$	840	822.5	761.9	637.8

для всех образцов уточненные значения пьезоконстант и диэлектрической проницаемости меньше опубликованных в литературе на 15–20%.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 16-07-00984а).

- [1] Теплых А. А., Зайцев Б. Д., Кузнецова И. Е. Труды XXII сессии РАО. 2010. **1**. С. 253.  
[2] Тополов В. Ю., Панич А. Е. Электронный научный журнал «ИССЛЕДОВАНО В РОССИИ». 2008. [http:](http://)

- [zhurnal.apelarn.ru/articles/2008/002.pdf](http://zhurnal.apelarn.ru/articles/2008/002.pdf).  
[3] Nelder J. A., Mead R. Comput. J. 1965. **7**. N 4. P. 308.

## Refinement of the material constants of a piezoelectric ceramics of CTS-19 using disk acoustic resonator

A. A. Teplykh<sup>a</sup>, B. D. Zaitsev, A. M. Shikhabudinov, I. A. Borodina

Saratov branch of Kotelnikov Institute of Radiotechnics and Electronics of RAS, Saratov, 410019, Russia  
E-mail: <sup>a</sup>[teplykhaa@mail.ru](mailto:teplykhaa@mail.ru)

In this work the attempt of refinement of the material constants for disk samples of CTS-19 piezoceramics using broadband acoustic spectroscopy method is made. The vector electric impedance of each resonator was measured in a wide frequency range by means of the high-precision LCR measuring instrument. Then the theoretical model of the resonator using a 2-dimensional axisymmetric finite element method was created. Using this model the inverse task was solved with help of an Nelder-Mead algorithm and the refined values of all 10 material constants of a piezoceramics for each sample are calculated. Comparison of the refined values with the values which are earlier published in literature is carried out.

PACS: 43.20+g.

Keywords: disk piezoresonator, piezoceramics CTS-19, material constants, Nelder-Mead algorithm.

Received 12 July 2017.

### Сведения об авторах

1. Теплых Андрей Алексеевич — канд. физ.-мат. наук, ст. науч. сотрудник; тел.: (452) 27-24-01, e-mail: [teplykhaa@mail.ru](mailto:teplykhaa@mail.ru).
2. Зайцев Борис Давыдович — докт. физ.-мат. наук, профессор, зав. лабораторией; тел.: (452) 27-24-01, e-mail: [zai-boris@yandex.ru](mailto:zai-boris@yandex.ru).
3. Шихабудинов Александр Магомедович — канд. физ.-мат. наук, ст. науч. сотрудник; тел.: (452) 27-24-01, e-mail: [alex-sheih@yandex.ru](mailto:alex-sheih@yandex.ru).
4. Бородин Ирина Анатольевна — канд. физ.-мат. наук, ст. науч. сотрудник; тел.: (452) 27-24-01, e-mail: [borodinaia@yandex.ru](mailto:borodinaia@yandex.ru).