

Неоднородные вязкие волны, генерируемые пластинами конечных размеров

А. С. Павловский,* С. А. Июдина,† Н. Г. Семенова‡
 Санкт-Петербургский государственный университет. Россия,
 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., д. 7/9
 (Статья поступила 17.07.2017; Подписана в печать 13.09.2017)

Численно решена система нестационарных нелинейных уравнений, описывающих движение осциллирующей бесконечно тонкой пластины конечной длины в несжимаемой вязкой жидкости. Решение получено в виде поля колебательных скоростей вязкой волны как функции безразмерных параметров: безразмерной длины l и безразмерного колебательного смещения пластины a . Построены траектории движения частицы жидкости в таком поле. Показано, что они отличаются от прямых, перпендикулярных направлению распространения, характерных для идеализованных (линейных) поперечных вязких волн. Появляется горизонтальная составляющая колебательной скорости частицы жидкости, зависящая от величины a . Качественно проанализированы особенности скорости распространения вязкой волны, возбужденной пластиной конечных размеров.

PACS: 43.25.Ed, 43.40.Ga, 62.10.+s.

УДК: 532.5.032, 532.591, 532.592.2.

Ключевые слова: вязкая неоднородная волна, скорость распространения, траектория частиц жидкости, конечная пластина.

ВВЕДЕНИЕ

Классическое решение линеаризованного уравнения движения вязкой несжимаемой жидкости в виде уравнения теплопроводности приведено во всех учебниках, например, [1], и имеет следующий вид:

$$V = V_0 \exp i(\omega t - kx), \quad (1)$$

где

$$k = (1 + i)/\delta = k_0 + i/\delta = \omega/c_{ph} + i/\delta \quad (2)$$

комплексное волновое число. В вещественной форме записи выражение (1) принимает вид

$$V = U_0 \cos(\omega t - k_0 x), \quad (3)$$

где

$$U_0 = V_0 \exp(-x/\delta). \quad (4)$$

V_0 — экспоненциально убывающая с расстоянием амплитуда вязкой волны.

Одномерные решения (1), (3) получены при условиях прилипания вязкой жидкости на колеблющейся с циклической частотой ω в своей плоскости (YZ) бесконечной плоскости и убывании скорости жидкости до нуля на бесконечности. Здесь обозначено $\delta = \sqrt{2\nu/\omega}$ — толщина пограничного слоя — расстояние, на котором амплитуда плоской волны убывает в e раз; $\nu = \eta/\rho$ — кинематическая и η — сдвиговая вязкости, ρ — плотность среды. V_0 — амплитуда колебательной скорости пластины.

Выражения (1), (3) описывают плоскую вязкую поперечную одномерную волну, бегущую по X с фазовой скоростью $c_{ph} = \omega\delta$. Эта скорость постоянна. Волна экспоненциально затухает. Волна, амплитуда которой экспоненциально убывает в определенном направлении, проекция волнового вектора на которое имеет мнимую составляющую, является неоднородной [1].

Для иллюстрации нестационарного поля скорости неоднородной вязкой волны по (1), (3) воспользовались результатом численного расчета, выполненного в пакете Matlab для следующих условий: среда с динамической вязкостью $\eta = 1480 \times 10^{-3}$ Па·с, плотностью $\rho = 1.26 \times 10^3$ кг/м³, кинематической вязкостью $\nu = \eta/\rho \approx 1175 \times 10^{-6}$ м²/с, частота колебаний пластины $f = 50$ Гц, толщина пограничного слоя $\delta = \sqrt{2\nu/\omega} \approx 2.7 \times 10^{-3}$ м.

На рис. 1 приводится изображение такой плоской вязкой волны в безразмерных координатах. Контурными линиями нанесены изолинии амплитуд скорости U_0 . Из этого рисунка видно, что волна распространяется вдоль X , ее плоские фронты совпадают с плоскостями, перпендикулярными оси распространения. Скорость движения плоскостей равных амплитуд постоянна и равна 0.756 м/с.

Численное решение линеаризованного уравнения движения позволило получить поле колебательных скоростей вязкой волны для любого момента времени. Выбрали шаг по времени достаточно малым ($T/200$) и измерили соответствующее ему смещение определенной фазы волны. Удалось определить фазовую скорость волны. Она оказалась постоянной и равной вычисленной по аналитической формуле (2) 0.859 м/с.

В наших исследованиях [2, 3] были косвенные указания на то, что вязкие волны, генерируемые источниками конечных размеров, проявляют и другие интересные свойства неоднородных волн: пространственную дисперсию скорости распространения, отклонение траектории движения частиц жидкости от прямой, пер-

*E-mail: artyom.pavlovskiy@gmail.com

†E-mail: sisgfi@mail.ru

‡E-mail: tatabukamena@rambler.ru

пендикулярной волновому вектору. Этим темам посвящена настоящая работа.

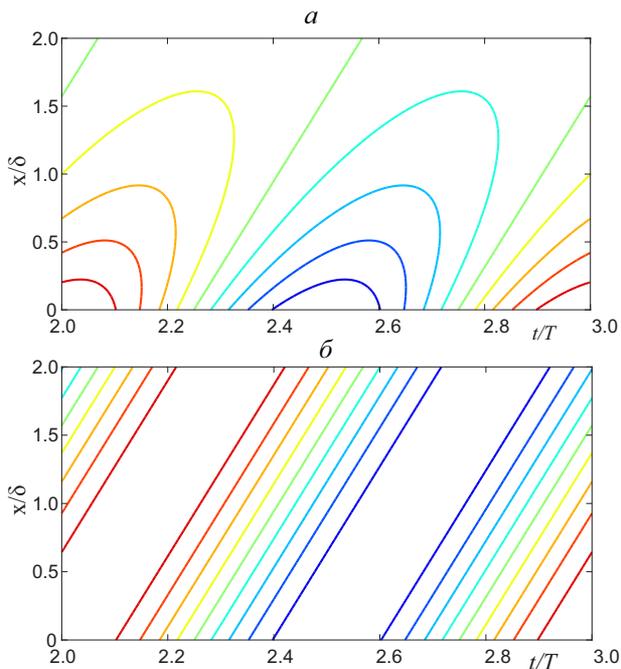


Рис. 1: Представление одномерной неоднородной плоской вязкой волны в безразмерных координатах: a — изолинии скорости жидкости V , b — изолинии величины V/V_0 . Зеленые линии соответствуют нулевым значениям указанных величин

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Постановка задачи с точностью до значений безразмерных параметров $a = A/\delta$ и $l = L/\delta$ совпадает с постановкой задачи работы [4]. Величина L — длина пластины в направлении колебаний, величина A — амплитуда колебательного смещения.

2. ТРАЕКТОРИИ ЧАСТИЦ ЖИДКОСТИ В ВЯЗКОЙ ВОЛНЕ

Чтобы найти траекторию частицы жидкости, использовали следующую методику.

1. Численно решили систему уравнений (1) постановки задачи указанной работы.
2. Задали массивы начального положения частиц $x(1) = x_0$ и $y(1) = y_0$ и начальный момент времени $t(1) = t_0$.
3. Нашли номера элементов n в массиве данных позиции узлов сетки МКЭ, соответствующие компонентам массива, наиболее близким по значе-

нию к координатам $x(i)$ и $y(i)$, по методу наименьших квадратов. Номера элементов одномерного массива времени $i = 1, 2, 3, \dots$

4. Нашли элементы массива V_n результатов решения задачи для текущего момента времени $t(i+1) = t(i) + \Delta t(i)$ с этими номерами.
5. Вычислили новые координаты $x(i+1) = x(i) + V_{xn}(i) \Delta t(i)$, $y(i+1) = y(i) + V_{yn}(i) \Delta t(i)$.
6. Использовали результаты для задания начального положения частиц и начального момента времени для следующей итерации.
7. Повторили указанные шаги, заменив начальное положение результатом предыдущей итерации.

На рис. 2 показаны траектории частиц жидкости, выделенных в поле вязкой волны, возбужденной осциллирующими пластинами бесконечно малой толщины и длиной $l = 60$ и $l = 1$ при значении параметра $a = 0.5$. Тонкая вертикальная пунктирная линия — ось симметрии задачи. Колеблющаяся пластина нулевой толщины изображена на этой оси толстой сплошной линией. Видно, что строго вертикальные смещения частиц, характерные для пластины большой длины $l = 60$ (вертикальные тонкие цветные линии, длина которых пропорциональна амплитуде колебательного смещения) пропадают с уменьшением размера пластины. Траектории частиц жидкости за время, равное периоду, становятся фигурами, напоминающими эллипсы. Появляется x -ая компонента скорости и тем большая, чем меньше параметр l . Размер «эллипса» (соотношение x -ой и y -ой компонент скорости) и ориентация «эллипса» зависят от начальных координат выбранных точек наблюдения. Расположенные на оси частицы жидкости (область 2) приобретают в разы меньшие горизонтальные компоненты скорости по сравнению с частицами, расположенными ближе к краю пластины (область 1). Особенно хорошо это заметно на вставке, где траектории показаны в увеличенном виде. Видно также, что за время, большее периода, траектории частиц становятся спиралями.

На рис. 3 показана зависимость x -компоненты колебательной скорости V_x вязкой волны от параметра a . Обратим внимание, что по оси ординат отложена величина V_x/V_0 , что позволяет сравнить сильно различающиеся величины скоростей. Из рисунка видно, что отклонение траектории частицы от вертикальной прямой, даже находящейся первоначально на оси пластины, появляется при сравнительно малых a .

На рис. 4 приведены аналогичные зависимости, но для жидкой частицы, расположенной вблизи края пластины. Из рисунка видно, что на траекторию частицы в вязкой волне, генерируемой у края пластины, влияние параметра a сильнее, чем для частицы, расположенной на оси, проходящей через центр пластины перпендикулярно ее поверхности.

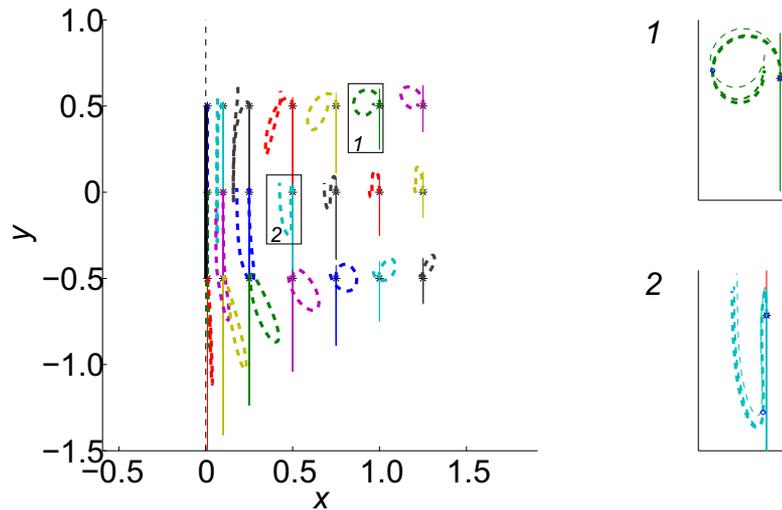


Рис. 2: Траектории частиц жидкости в полях вязких волн, генерируемых конечными пластинами при значении параметра $a = 0.5$. Тонкие цветные линии соответствуют траекториям частиц жидкости при значении параметра $l = 60$. Толстые пунктирные цветные линии соответствуют траекториям частиц жидкости при значении $l = 1$. Звездочки — начальные положения частиц жидкости при значении безразмерного времени $\tau = \pi/2 + \pi n$. Временной интервал, в который совершается движение, $\tau = 2\pi$. На вставках справа 1 и 2 увеличены области, отмеченные прямоугольными рамками на рисунке. На каждой вставке толщина линий соответствует увеличению времени наблюдения, т.е. росту n от 1 до 3. Синими кружками выделены положения частиц в моменты времени $\tau = 3\pi/2 + \pi n$ и $\tau = 2\pi + \pi$

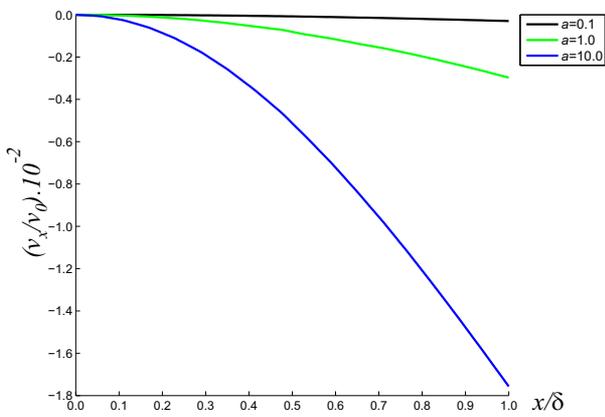


Рис. 3: Зависимость x -компоненты колебательной скорости V_x частицы жидкости от параметра a . Длина пластины $l = 10\delta$. Первоначальные координаты частицы $x = 0, y = 0$. Время наблюдения $t = 0.03$ с

Широкий диапазон исследованных параметров a показал, что горизонтальная компонента колебательной скорости (по величине и направлению) вязкой волны немонотонно зависит от его величины. Для конкретных условий этой задачи увеличение параметра a с 5 до 6 привело к изменению знака производной кривой $\partial v_x / \partial x$.

Обратим внимание на то, что направления x -компоненты колебательной скорости V_x частиц, рас-

положенных первоначально на оси $Y = 0$ и у края пластины противоположны. По оси частицы движутся к поверхности пластины, а на краях — от нее. Это же качественно видно из анализа наклона спиралей траекторий, приведенных на рис. 2. Касательная в каждой точке траектории совпадает с направлением мгновенного вектора скорости жидкости. Это даёт основание предположить направление замкнутых мгновенных линий тока.

3. СКОРОСТЬ РАСПРОСТРАНЕНИЯ

Рассмотрим процесс распространения вязкой волны от пластины конечных размеров и сравним его с таковым, возбужденным бесконечной пластиной. Для этого численно в пакете Comsol 5.2 решили нестационарное нелинейное уравнение движения несжимаемой вязкой жидкости с граничными условиями прилипания (см. систему (1) постановки задачи). Были использованы следующие шаги по пространству $\delta/30$ и по времени $T/200$. Полученное поле колебательной скорости $V(r, t)$ построено в виде, аналогичном рис. 1. При делении величины V на значение величины амплитуды U_0 , как было сделано для задачи о бесконечной пластине, контурные графики приняли вид, показанный на рис. 5. Для бесконечной пластины, заметим, они имели вид параллельных прямых (рис. 1). Отсюда следует, что поле вязких волн, генерируемое бесконечно тонкой пластиной конечной длины l , не описывается огибающей U_0 .

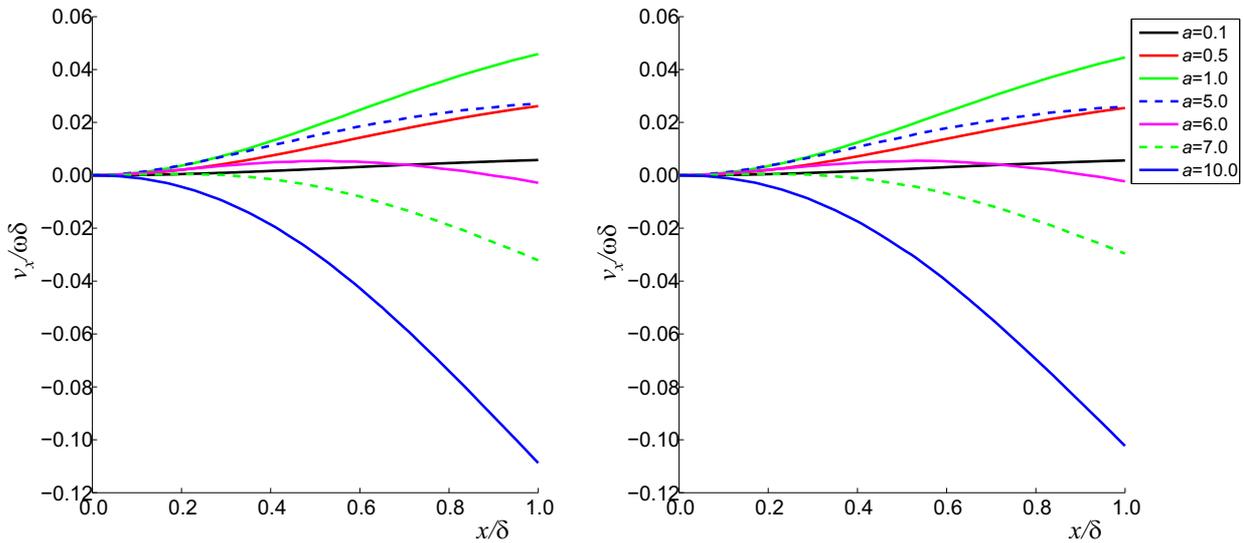


Рис. 4: Зависимость горизонтальной составляющей колебательной скорости частицы жидкости от расстояния x точки наблюдения от пластины. Параметром кривых является параметр $a = A/\delta$. Правый рисунок относится к переднему по ходу движения краю, а левый — к заднему. Длина пластины $l = 10\delta$. Первоначальные координаты частицы $x=0, y = L/2 - L/10$. Время наблюдения $t=0.025$ с для правого рисунка, $t=0.035$ с — для левого

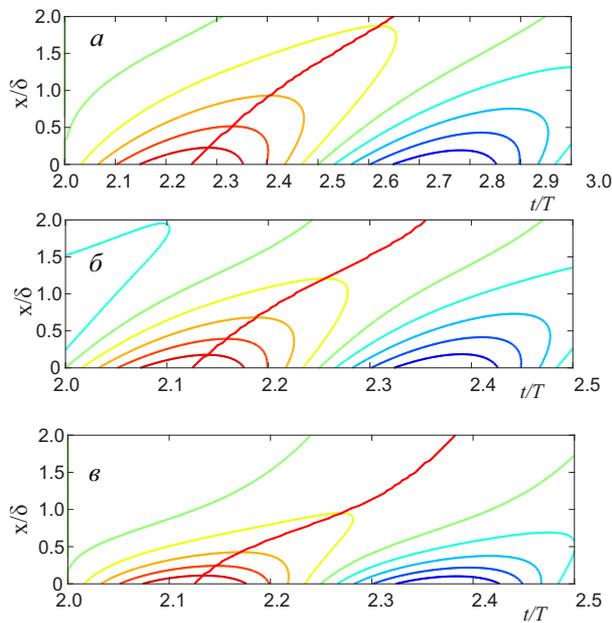


Рис. 5: Контурные графики линий равных амплитуд для осциллирующих пластин конечной длины: $a - l = 10\delta$, $b - 5\delta$, $v - 1\delta$. Безразмерная амплитуда колебаний $a = 0.25$. Точка наблюдения выбрана на геометрической оси пластины $Y = 0$

Это наблюдение подтверждает вывод, сделанный в [3] для осциллирующего цилиндра, что в результате взаимодействия вязких волн и осциллирующего потока зависимость совокупной скорости жидкости от расстояния имеет сложный вид, зависящий от безразмерных параметров a и l .

Контурные линии равных амплитуд найдены для пластин трех длин $l = 10\delta, 5\delta, 1\delta$. Характерным для всех них является следующее. Линия, соответствующая фазе вязкой волны $n\pi$, где $n = 0, 1, 2, \dots$ (зеленая линия на рис. 5) — это линия перемещения нуля колебательной скорости. Эта линия не прямая, как было для случая бесконечной пластины. Она тем сильнее отклоняется от прямой, чем меньше размер источника. Величина dx/dt есть скорость перемещения нуля скорости волны. Как видно из рисунков, эта величина с увеличением расстояния x от пластины сначала падает, а затем растет. То есть проявляется дисперсия скорости распространения, усиливающаяся для малых источников.

На рис. 5 пунктиром построены линии перемещения максимумов скорости, соответствующие фазе волны $(n + 1)\pi/2$. Видно, что с уменьшением длины пластины скорость распространения этой фазы волны растет. Проявляется и зависимость скорости распространения от расстояния x от пластины.

Вычисленные значения величины скорости распространения оказались меньше скорости распространения плоской вязкой волны (рис. 6).

Обращает на себя внимание тот факт, что отмеченные выше особенности распространения вязких волн сильно зависят от времени наблюдения. В течение первого полупериода вязкая волна распространяется еще в неподвижной жидкости. Затем волны распространяются в жидкости, возмущенной не только колебательными движениями, но и потоками вытеснения, сопровождающими осцилляции источников конечных размеров.

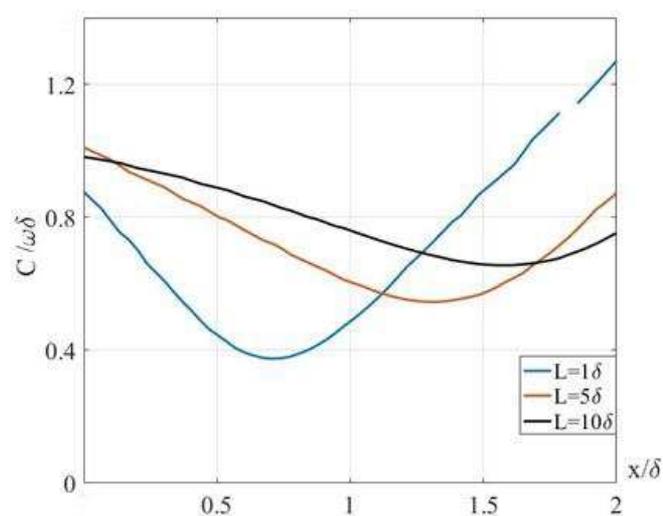


Рис. 6: Скорость распространения фазы π (нули колебательной скорости) для пластин разной длины на расстоянии до середины пластины $y = 0$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Траектории частиц жидкости в поле вязкой волны от пластины конечной длины не прямые, параллель-

ные направлению колебаний, а похожи на эллипсы. Соотношение осей этих «эллипсов» определяется начальными координатами частицы жидкости при прочих равных условиях.

Экстремальное значение величины горизонтальной составляющей колебательной скорости частиц жидкости на оси, проходящей через точку, находящуюся вблизи края пластины, наблюдается при $a = 1$. При $a < 5$ горизонтальная компонента скорости жидкости имеет направление от пластины. В диапазоне $5 < a < 6$ ее направление изменяется на противоположное.

Огибающая поля вязких волн, возбужденного пластиной конечных размеров, описывается функцией, убывающей медленнее, чем функция $\exp(-x/\delta)$ для бесконечной плоскости. Ее конкретный вид зависит от величин безразмерных параметров a и l , что подтверждает сделанный нами ранее вывод для осциллирующего цилиндра.

Скорости распространения экстремального и нулевого значений функции колебательной скорости в решаемой нелинейной задаче не равны друг другу. Для них наблюдаются пространственные дисперсии.

Авторы благодарят Илью Шатилина за проведение серии численных расчетов.

- [1] Исакович М. А. Общая акустика. М.: Наука, ГИФМЛ, 1973.
 [2] Павловский А. С., Семёнова Н. Г. ЖТФ. 2015. **60**, № 3. С. 344.
 [3] Павлов В. А., Павловский А. С., Семёнова Н. Г. ЖТФ.

2016. **86**, выпуск 7. С. 31.
 [4] Павловский А. С., Семёнова Н. Г. Ученые записки физического ф-та Московского ун-та. 2017. № 5. С.

Properties of the inhomogeneous viscous waves excited by a plate of finite size

A. S. Pavlovskii^a, S. A. Iudina^b, N. G. Semenova^c

Department of Radiophysics, Faculty of Physics, Saint Petersburg State University. Saint Petersburg 199034, Russia
 E-mail: ^aartyom.pavlovskiy@gmail.com, ^bsisgfi@mail.ru, ^ctatabukamena@rambler.ru

We have numerically solved the set of time-dependent nonlinear equations, which describes motion of an infinitely thin plate oscillating in incompressible viscid fluid. The solution was obtained in the form of oscillation velocity field in the viscid wave. It is a function of the dimensionless length l and the dimensionless oscillation displacement a of the plate. We have plotted trajectories of the fluid particle motion in such a field. It has been shown that they differ from the straight lines normal to the direction of propagation. Such lines are peculiar to the idealized (linear) transverse viscid waves. There appeared a horizontal component of the oscillation speed of the fluid particle. The value of horizontal component depends on a . We have qualitatively analyzed characteristic features of the propagation velocity of viscid wave, excited by a finite plate.

PACS: 43.25.Ed, 43.40.Ga, 62.10.+s.

Keywords: an inhomogeneous viscous wave, propagation velocity, trajectories of the fluid particle motion, finite size plate.

Received 17 July 2017.

Сведения об авторах

1. Иудина Софья Александровна — студентка; тел.: e-mail: sisgfi@mail.ru.
2. Павловский Артём Сергеевич — аспирант; тел.: e-mail: artyom.pavlovskiy@gmail.com.
3. Семенова Наталия Глебовна — канд. физ.-мат. наук, доцент; e-mail: tatabukamena@rambler.ru.