

## Изучение обратных сдвиговых волн в пьезоэлектрических пластинах кристаллов класса $2mm$ на основе асимптотического разложения дисперсионных уравнений

И. А. Недоспасов<sup>1,\*</sup>, В. Г. Можжев<sup>2,†</sup>, И. Е. Кузнецова<sup>1,‡</sup>

<sup>1</sup>Институт радиотехники и электроники имени В. А. Котельникова РАН  
Россия, 125009, Москва, ул. Моховая, д. 11, корп. 7

<sup>2</sup>Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет, кафедра акустики  
Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2

(Статья поступила 03.07.2017; Подписана в печать 12.09.2017)

Из разложения дисперсионных уравнений вблизи точек рождения высших мод следует, что дисперсионные зависимости для изучаемых волн можно представить в виде суммы двух слагаемых, соответствующих двум различным механизмам возникновения обратных волн. Одно из них пропорционально кривизне кривой медленности в вертикальном направлении. Второе пропорционально отрицательному смещению волновых лучей при отражении. Конкуренция этих двух механизмов объясняет и описывает количественно спектр и существование обратных сдвиговых волн в случае  $X$ -среза, либо их отсутствие в случае  $Y$ -среза в пластинах кристаллов  $\text{KNbO}_3$  класса  $2mm$ .

PACS: 43.20.+g, 68.60.Bs, 77.55.hn.

УДК: 534.2, 534-8, 534-16, 681.89.

Ключевые слова: обратные сдвиговые волны, пьезоэлектрические пластины, кристаллы класса  $2mm$ , асимптотические разложения.

### ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время в различных областях волновой физики уделяется большое внимание изучению волн с противоположным направлением фазовой и групповой скоростей. Такие волны принято называть обратными. Чисто сдвиговые нормальные волны в непьезоэлектрических пластинах обратными быть не могут, но пьезоэффект делает их допустимыми [1]. Однако относительный частотный диапазон существования таких волн в обычных пьезоэлектрических кристаллах весьма мал. В пластине  $\text{ZnO}$  он составляет всего лишь  $2 \cdot 10^{-5}$  [2], что налагает существенные ограничения на выбор рабочей частоты и приемлемые отклонения от плоскопараллельности для противоположных поверхностей пластин. Вероятно, поэтому обсуждаемые волны до сих пор экспериментально не обнаружены.

В недавней статье [3] авторов настоящей работы было численно показано, что диапазоны существования обратных чисто сдвиговых волн могут быть очень большими, и более того, эти диапазоны для разных мод имеют тенденцию сливаться друг с другом при повышении номера мод. Такими свойствами обладают пьезоэлектрические пластины кристалла ниобата калия, отличающегося необычайно сильным пьезоэффектом. Целями настоящей работы являются: 1 — проверка предположения, что диапазоны существования обратных волн для высших мод в пластинах ниобата калия с повышением номера моды начинают перекрываться, образуя сплошной спектр; 2 — аналитическое изучение спектра обратных сдвиговых волн в пласти-

нах пьезоэлектрических ромбических кристаллов класса  $2mm$ , к которому относится и ниобат калия, с целью выяснения механизмов возникновения этих волн.

### 1. ДИСПЕРСИОННЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ МОД В ПЛАСТИНАХ $\text{KNbO}_3$ $X$ -СРЕЗА

В статье [3] численные расчеты дисперсионных характеристик для чисто сдвиговых волн в пластинах ниобата калия  $X$ - и  $Y$ -срезов были ограничены первыми четырьмя низшими модами (двумя симметричными и двумя антисимметричными). В настоящей работе проведены дополнительные вычисления для высших мод вплоть до девятой. Имеется в виду сплошная нумерация симметричных и антисимметричных мод, начиная с нулевой, кривые для которой не приведены, поскольку обратные волны для этой моды не существуют. Зависимости групповых скоростей  $V_g$  от произведения частоты  $f$  на толщину пластины  $h$  для первых девяти мод, имеющих отсечку, с номерами  $p = 1 \div 9$  (пяти антисимметричных мод и четырех симметричных) в пластине ниобата калия  $X$ -среза приведены на рисунке.

Из приведенного графика и аналитических оценок следует, что левые границы диапазонов существования обратных волн на ветвях мод разного порядка располагаются по горизонтальной оси квазиэквидистантно, а правые — строго эквидистантно, но они имеют разный период повторения:  $\delta_l \approx 1952$  м/с для левых границ,  $\delta_r \approx 2421$  м/с для правых. Различие этих периодов и является очевидной причиной уширения диапазонов существования  $\Delta_p$  обратных волн на ветвях мод с фиксированным номером  $p$  при увеличении  $p$ :  $\Delta_p \approx (\delta_r - \delta_l)p$ . Уширение диапазонов приводит к тому, что начиная с пятой моды (моды А3) границы соседних диапазонов перекрываются друг с другом, приво-

\*E-mail: [ianedospasov@mail.ru](mailto:ianedospasov@mail.ru)

†E-mail: [vgmozhaev@mail.ru](mailto:vgmozhaev@mail.ru)

‡E-mail: [kuziren@yandex.ru](mailto:kuziren@yandex.ru)

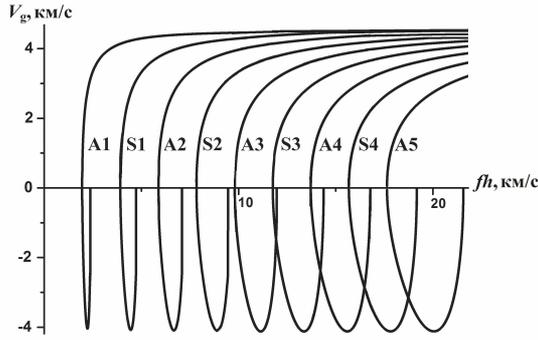


Рис. 1: Дисперсионные зависимости групповых скоростей для первых девяти мод с отсечкой в пластине кристалла ниобата калия X-среза.

для формирования сплошного спектра обратных волн. Это свойство должно существенно облегчить экспериментальное обнаружение и наблюдение таких волн.

## 2. АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ИЗУЧЕНИЕ ГРАНИЦ ДИАПАЗОНОВ СУЩЕСТВОВАНИЯ ОБРАТНЫХ ВОЛН

Правые границы диапазонов существования обратных волн на ветвях мод с фиксированным номером соответствуют выполнению условий толщинных резонансов и появлению высших мод, имеющих на этих границах бесконечную фазовую и нулевую групповую скорости. Поведение решений дисперсионных уравнений при малом нарушении условий толщинных резонансов, а именно, направления смещений этих решений от точек рождения высших мод в сторону меньших или больших значений по оси  $fh$  и определяет появление или отсутствие обратных волн на ветвях высших мод. Для изучения этого поведения решения трансцендентных дисперсионных уравнений, полученных в [3], были представлены двумя первыми членами разложения циклической частоты  $\omega$  по волновому числу  $k$  вблизи частот толщинных резонансов  $\omega_0$ . Результаты имеют вид

$$\omega^2 = \omega_0^2 - 2\varepsilon_0 e_{15}^2 k / d \rho \varepsilon_{11}^2 - [\varepsilon_{22} e_{15}^2 - (2e_{15} e_{24} + c_{44} \varepsilon_{11}) \varepsilon_{11}] k^2 / \rho \varepsilon_{11}^2, \quad (1)$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 - 2\varepsilon_{22} e_{15}^2 k^2 / \rho \varepsilon_{11}^2 - [\varepsilon_{22} e_{15}^2 - (2e_{15} e_{24} + c_{44} \varepsilon_{11}) \varepsilon_{11}] k^2 / \rho \varepsilon_{11}^2, \quad (2)$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 - 2\varepsilon_0 e_{24}^2 k / d \rho \varepsilon_{22}^2 - [\varepsilon_{11} e_{24}^2 - (2e_{24} e_{15} + c_{55} \varepsilon_{22}) \varepsilon_{22}] k^2 / \rho \varepsilon_{22}^2, \quad (3)$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 - 2\varepsilon_{11} e_{24}^2 k^2 / \rho \varepsilon_{22}^2 - [\varepsilon_{11} e_{24}^2 - (2e_{24} e_{15} + c_{55} \varepsilon_{22}) \varepsilon_{22}] k^2 / \rho \varepsilon_{22}^2. \quad (4)$$

Здесь  $\rho$  — плотность среды;  $c_{44}$ ,  $c_{55}$  — сдвиговые упругие модули;  $e_{15}$ ,  $e_{24}$  — пьезоконстанты;  $\varepsilon_{11}$ ,  $\varepsilon_{22}$  — диэлектрические проницаемости;  $d$  — полутолщина пластины;  $\varepsilon_0$  — диэлектрическая постоянная. Формулы (1) и (2) относятся к X-срезу, а (3) и (4) — к Y-срезу. Антисимметричные моды описываются формулами (1) и (3), а симметричные — (2) и (4). Для X-среза  $\omega_0 = (\pi p/h) \sqrt{(c_{55} + e_{15}^2/\varepsilon_{11})/\rho}$ , а для Y-среза  $\omega_0 = (\pi p/h) \sqrt{(c_{44} + e_{24}^2/\varepsilon_{22})/\rho}$ .

Выражения (1)-(4) относятся к ромбическим кристаллам и включают в себя как частный предельный случай известные результаты для гексагональных пластин [1].

Для существования обратных волн необходимо, чтобы частота  $\omega$  уменьшалась с ростом  $k$ , что напрямую определяется знаками слагаемых в формулах (1)-(4). Анализ показывает, что третьи слагаемые во всех приведенных формулах пропорциональны кривизне кривой медленности в вертикальном направлении, т.е. в направлении нормали к поверхности пластины. Для X-среза кривизна отрицательна, поскольку нормаль к поверхности пластины ориентирована по направлению локальной вогнутости на поверхности медленности. Для Y-среза поверхность медленности в направлении нормали выпуклая, и кривизна, соответственно, положительна. Отсюда следует, что локальная кривизна поверхности медленности может как способствовать (случай X-среза), так и препятствовать (случай Y-среза) возникновению обратных волн. Вторые слагаемые в формулах (1) и (3) для антисимметричных мод с точностью до множителя, близкого к единице, пропорциональны отрицательному смещению лучей при отражении [4] и всегда отрицательны. При малых  $k$  доминируют линейные по  $k$  слагаемые, что обеспечивает возникновение обратных волн, но только в диапазоне очень больших фазовых скоростей, поскольку эти слагаемые имеют малую величину. С увеличением  $k$  доминирующими становятся третьи слагаемые, которые обеспечивают существование обширных секторов обратных волн с относительно небольшими фазовыми скоростями в пластинах X-среза и отсутствие таких волн в том же диапазоне фазовых скоростей в пластинах Y-среза. Конкуренция этих двух механизмов количественно объясняет и описывает спектр и существование (X-срез), либо отсутствие (Y-срез) обратных сдвиговых волн в пластинах KNbO<sub>3</sub>. Вторые слагаемые в формулах (2), (4) квадратичны по  $k$ , и их идентификация в рамках используемого подхода не представляется возможной.

**ЗАКЛЮЧЕНИЕ**

Асимптотические разложения дисперсионных уравнений вблизи точек рождения высших мод позволили идентифицировать и количественно описать два механизма формирования обратных волн (кривизну кривой медленности в вертикальном направлении и отрица-

тельное смещение лучей при отражении). Их конкуренция объясняет существование и отсутствие обратных сдвиговых волн в пластинах  $\text{KNbO}_3$   $X$ - и  $Y$ -срезов.

Проведенное исследование частично поддержано грантами РФФИ №16-07-00629\_а, №17-07-00608\_а, №17-57-53101\_а.

- 
- [1] Бурлий П. В., Ильин П. П., Кучеров И. Я. Письма в ЖТФ. 1982. **8**, №9. С. 568.  
[2] Кучеров И. Я., Маляренко Е. В. Акуст. журн. 1998. **44**, №4. С. 492.  
[3] Кузнецова И. Е., Можяев В. Г., Недоспасов И. А. Радио-

- техника и электроника. 2016. **61**, №11. С. 1122.  
[4] Лямшев Л. М., Шевяхов Н. С. Акуст. журн. 1975. **21**, №6. С. 951.

---

**Study of backward shear waves in piezoelectric plates of crystal class  $2mm$  based on asymptotic expansion of the secular equations**

**I. A. Nedospasov<sup>1,a</sup>, V. G. Mozhaev<sup>2,b</sup>, I. E. Kuznetsova<sup>1,c</sup>**

<sup>1</sup>*Kotel'nikov Institute of Radio Engineering and Electronics, RAS. Moscow, 125009 Russia*

<sup>2</sup>*Acoustics Department, Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University. Moscow 119991, Russia*

*E-mail: <sup>a</sup>ianedospasov@mail.ru, <sup>b</sup>vgmozhaev@mail.ru, <sup>c</sup>kuziren@yandex.ru*

It follows from the expansion of the secular equations near the points of the higher-mode onset that the dispersion relations for waves under study can be represented as a sum of two terms corresponding to two different mechanisms of the appearance of backward waves. One of them is proportional to the curvature of the slowness curve in the vertical direction. The second one is proportional to the negative displacement of the wave rays upon reflection. The competition of these two mechanisms explains and describes quantitatively the spectrum and the existence of the backward shear waves in the  $X$ -cut case, or their absence in the  $Y$ -cut case in plates of  $\text{KNbO}_3$  crystals of  $2mm$  class.

PACS: 43.20.+g, 68.60.Bs, 77.55.hn.

*Keywords:* backward shear waves, piezoelectric plates, crystals of class  $2mm$ , asymptotic expansions.

*Received 03 July 2017.*

**Сведения об авторах**

1. Недоспасов Илья Александрович — мл. науч. сотрудник; тел.: (495) 629-36-78, e-mail: ianedospasov@mail.ru.
2. Можяев Владимир Геннадиевич — канд. физ.-мат. наук, ст. науч. сотрудник, (495) 939-29-27, e-mail: vgmozhaev@mail.ru.
3. Кузнецова Ирен Евгеньевна — доктор физ.-мат. наук, вед. науч. сотрудник, профессор РАН; (495) 629-36-78, e-mail: kuziren@yandex.ru.