Фазовый переход от вязкоупругости к пластичности. Описание на основе обобщенного вариационного принципа для диссипативной механики сплошных сред

Г. А. Максимов*
АО «Акустический институт имени академика Н. Н. Андреева»// Россия, 117036, Москва, ул.Шверника, д. 4
(Статья поступила 11.07.2017; Подписана в печать 13.09.2017)

В докладе на основе обобщенного вариационного принципа (ОВП) для диссипативной механики сплошной среды показано, что фазовый переход от вязкоупругого поведения среды к пластическому может быть описан в терминах нелинейной релаксации внутренних микровращений материальных точек. В линейном приближении получаемые на основе ОВП уравнения движения соответствуют вязкоупругой среде, частным случаем которой является среда Максвелла с низкочастотным поведением как у обычной вязкой жидкости. В статье показано, что за счет выбора только нужной функциональной зависимости сдвиговой нелинейности можно добиться перехода от вязкоупругого поведения среды к ее пластическому поведению с ростом сдвиговой деформации.

PACS: 43.25.Ba, 64.60.Bd УДК: 534, 538.9
Ключевые слова: пластичность, вязкоупругость, фазовый переход, обобщенный вариационный принцип.

ВВЕДЕНИЕ

Пластичность как явление состоит в том, что при малых сдвиговых нагрузках поведение среды является упругим, а при превышении сдвиговой нагрузкой некоторого предела та же самая среда ведет себя как вязкая жидкость. С точки зрения фазового состояния среды с увеличением сдвиговой нагрузки происходит фазовый переход от твердого (упругого) состояния среды к ее жидкому состоянию. Традиционно фазовые переходы рассматриваются в зависимости от температуры и давления. В случае пластичности фазовый переход связан с изменением сдвигового напряжения. Для описания пластичности используются нелинейные феноменологические реологические модели, например, реологическая модель Бингама–Шведова.

Если коэффициент вязкости не постоянен и зависит от условий деформации среды, то это означает, что жидкость является неньютоновской и она обладает реологическими свойствами. В линейном приближении реологические свойства описываются моделью Максвелла

$$\tau\dot{\sigma} + \sigma = \eta\dot{\varepsilon}, \tag{1}$$

где σ — напряжение, ε — деформация, η — коэффициент вязкости, τ — время релаксации. На малых временах $t \ll \tau$ среда, описываемая моделью Максвелла, ведет себя как упругое тело с модулем сдвига $\mu = \eta/\tau$, а на больших временах $t \gg \tau$ среда является обычной вязкой (ньютоновской) жидкостью.

Если в правую часть реологического уравнения (1) добавить слагаемое, пропорциональное деформации, то получится реологическое уравнение стандартного вязко-упругого тела:

$$\tau\dot{\sigma} + \sigma = \eta\dot{\varepsilon} + \mu\varepsilon, \tag{2}$$

где через μ обозначен статический модуль сдвига. Реологическое уравнение (2) описывает упругую среду с релаксацией. Таким образом, интуитивно понятно, что переход от вязко–упругого поведения (2) к поведению вязкой жидкости может быть осуществлен за счет зависимости модуля статической упругости μ от амплитуды и скорости деформации

$$\mu = \mu(\varepsilon, \dot{\varepsilon}). \tag{3}$$

Причем зависимость (3) должна быть такой, чтобы при малых деформациях модуль сдвига μ был константой, а при достижении некоторого предельного значения деформаций стремился бы к нулю. Однако остается вопрос о том, как непротиворечивым образом ввести соответствующие зависимости (нелинейную реологию) в гидродинамику и механику сплошной среды?

Далее, реологические уравнения (1)–(2) характеризует диссипативные процессы в среде. Таким образом, нужно развить подход для последовательного описания диссипативной гидродинамики и механики сплошной среды с нелинейными релаксационными процессами. Такой подход может быть развит на основе обобщенного вариационного принципа (ОВП) для дисспативной механики сплошной среды, который ранее был сформулирован автором [1, 2]. Развитый подход позволяет разработать единую физико-математическую модель течения реологических жидкостей в том числе и под действием распространяющегося акустического поля.

1. ОБОЩЕННЫЙ ВАРИАЦИОННЫЙ ПРИНЦИП

ОВП для диссипативной механики сплошной среды объединил вариационный принцип Гамильтона для бездиссипативных механических систем с вариационным принципом Онсагера для диссипативных термодинамических систем [1, 2]. Функция Лагранжа L

*E-mail: gamaximov@mail.ru

в ОВП строится в виде разности кинетической K и свободной F энергий, а также интеграла по времени от диссипативной функции D

$$L = K - F - \int_0^t D dt'. \tag{4}$$

При этом в качестве независимых переменных выступают поля массовых $\mathbf{u}$ и тепловых $\mathbf{u}_T$ смещений, где последние определяются соотношением $div\mathbf{u}_T = (T - T_0)/T_0$, где T и T_0, соответственно, текущая и равновесная температуры. Наличие двух указанных полей обеспечивает консервативность полной системы при наличии диссипации, которая приводит к тому, что механическая энергия переходит в тепловую. Как показано в работах [1, 2], на основе ОВП можно получить систему уравнений гидродинамики вязкой сжимаемой жидкости в форме Навье–Стокса [3]. При этом для учета слагаемых, ответственных за вязкость жидкости, приходится, в соответствии с подходом Мандельштама–Леонтовича [4], вводить некий внутренний параметр тензорного типа, релаксация которого и обеспечивает появление слагаемых с вязкостью. Следует отметить, что данный подход позволил обобщить уравнение Навье–Стокса, в котором вязкость является константой, на более общий случай, учитывающий релаксацию вязкости, аналогичную модели Максвелла [5]. Физическая интерпретация тензорного внутреннего параметра раскрыта в работах [6, 7], где показано, что он связан с полем внутренних микроповоротов, которое ответственно за релаксацию внутреннего углового момента материальных точек, составляющих сплошную среду.

Основными независимыми переменными, в терминах которых должно проводится построение механики сплошной среды, являются величины, которые могут быть определены для отдельной материальной точки в соответствии с ее интегралами движения: средний массовый вектор смещения $\mathbf{u}$ (скорость этого смещения $\mathbf{v} = \partial\mathbf{u}/\partial t$ определяется интегралами движения импульса и массы $\mathbf{v} = \mathbf{P}/M$), угол поворота φ (угловая скорость вращения $\mathbf{\Omega} = \dot{\varphi}$ определяется интегралом движения углового момента $\mathbf{\Omega} = \mathbf{M}/I$, где I — момент инерции) и тепловым смещением $\mathbf{u}_T$, определяющим изменение температуры и связанным с интегралом энергии [1, 2]. Если для краткости не учитывать тепловую состалающую, то в соответствии с набором независимых полевых переменных можно записать кинетическую K, свободную F энергии и диссипативную функции D в виде соответствующих квадратичных форм

$$2K = \rho\dot{\mathbf{u}}^2 + I\dot{\varphi}^2, \quad 2D = \gamma\dot{\varphi}^2, \tag{5}$$

$$2F = (\lambda + \mu)(\nabla\mathbf{u})^2 + \mu[\nabla\mathbf{u}]^2 + \mu'\left([\nabla\mathbf{u}] + \frac{\delta}{\mu'}\varphi\right)^2. \tag{6}$$

Отметим, что кинетическая энергия представлена как сумма кинетических энергий поступательного и вращательного движений. Два первых слагаемых в квадратичной форме (5) для свободной энергии F соответствуют ее обычному представлению в теории упругости [5], а остальные слагаемые описывают вклад, связанный с полем микровращений. При этом за взаимодействие поля массовых смещений и поля микровращений отвечает слагаемое с коэффициентом δ.

Система уравнений движения, которая следует из обобщенного вариационного принципа, имеет вид:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial K}{\partial\dot{\mathbf{u}}} - \nabla\frac{\partial F}{\partial\nabla\mathbf{u}} - [\nabla\frac{\partial F}{\partial[\nabla\mathbf{u}]}] = -\frac{\partial D}{\partial\dot{\mathbf{u}}}, \tag{7}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial K}{\partial\dot{\varphi}} + \frac{\partial F}{\partial\varphi} = -\frac{\partial D}{\partial\dot{\varphi}}. \tag{8}$$

Отметим, что после подстановки квадратичных форм (5)–(6) в (7)–(8), получаемые уравнения движения, аналогичны при $\mu = 0$ уравнению Навье–Стокса с учетом релаксации вязкости в модели Максвелла (1), а при $\mu \neq 0$ они оказываются аналогичными уравнению движения вязкоупругой среды в модели стандартного неупругого тела (2) [6, 7].

2. ВЯЗКОУПРУГО–ПЛАСТИЧЕСКИЙ ФАЗОВЫЙ ПЕРЕХОД

Если пренебречь инерционными слагаемыми, связанными с кинетической энергией в (5), так что вместо (8) будем иметь

$$\frac{\partial F}{\partial\varphi} = -\frac{\partial D}{\partial\dot{\varphi}},$$

то на основе ОВП с квадратичными формами диссипативной функции (5) и свободной энергии (6) могут быть выведены реологические соотношения между сдвиговыми напряжениями σ и сдвиговыми деформациями ε, аналогичные модели стандартного неупругого тела

$$\tau\dot{\sigma} + \sigma = (\eta + \mu\tau)\dot{\varepsilon} + \mu\varepsilon, \tag{9}$$

где введены обозначения для времени релаксации $\tau = \gamma\mu'/\delta^2$ и коэффициента сдвиговой вязкости $\eta = \mu'\tau$. Нетрудно видеть, что при $\mu \to 0$ происходит переход от модели стандартного неупругого тела к модели Максвелла, которая на низких частотах $\omega\tau \ll 1$ соответствует обычной вязкой жидкости.

В данной работе для описания вязкоупруго-пластического перехода (так чтобы при малых сдвиговых деформациях поведение среды было вязкоупругим, а при больших — пластическим) предлагается рассматривать следующее обобщение выражения для свободной энергии

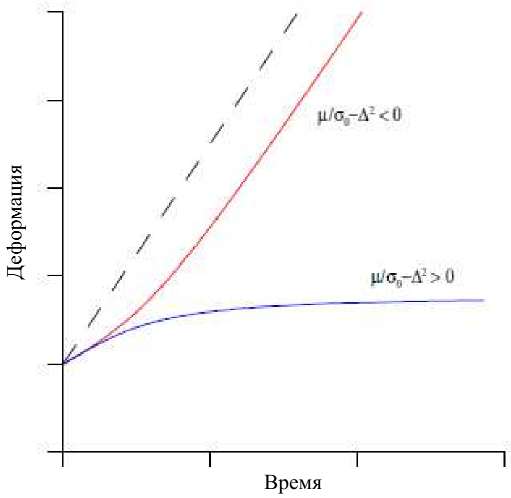

Рис. 1: Зависимость сдвиговой деформации среды от времени. Вязко–упругое поведение — синяя линия, пластическое течение — красная линия. Штриховой линией показано вязкое течение в ньютоновском пределе

$$2F = (\lambda+\mu)(\nabla \mathbf{u})^2 + \mu\, f([\nabla \mathbf{u}]^2) + \mu' \left([\nabla \mathbf{u}] + \frac{\delta}{\mu'}\varphi\right)^2, \tag{10}$$

где нелинейная функция $f(z)$ обладает следующими свойствами: $f(z) \to z$ при $z \to 0$ и $\sqrt{z}\partial f(z)/\partial z \to 0$ при $z \to \infty$. Таким образом, для описания пластичности реологическое соотношение (9) модифицируется следующим образом:

$$\tau\dot{\sigma} + \sigma = \eta\dot{\varepsilon} + \mu\left(1 + \tau\frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial f(\varepsilon^2)}{\partial \varepsilon}. \tag{11}$$

Конкретный вид функции $f(z)$ может быть разным и определяться на основе экспериментального нелинейного поведения материала. Для аналитического описания пластичности можно выбрать простейший вид такой функции с минимальным количеством свободных параметров

$$f(z^2) = \ln\left(1 + z^2/\Delta^2\right). \tag{12}$$

На основе полученных соотношений (11)–(12) в докладе приводятся аналитические выражения, описывающие фазовый переход от вязкоупруго поведения среды к пластическому поведению в зависимости о величины постоянного касательного напряжения σ_0, приложенного в начальный момент времени к среде. При этом характер поведения среды определяется знаком выражения $\mu/\sigma_o - \Delta^2$, как показано на рис. 1. При малых сдвиговых напряжениях $\sigma_o < \mu/\Delta^2$ поведение среды является вязкоупругим, а при при превышении порога $\sigma_o > \mu/\Delta^2$ среда становится пластичной и начинает течь.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, в докладе разработан подход, позволяющий построить на основе ОВП последовательную теорию пластичности как диссипативного фазового перехода

[1] *Maximov G. A.* In: New Research in Acoustics. Ed.: B. N. Weis. Nova Science Publisher. 2008. P. 21.
[2] *Максимов Г. А.* Вычислительная механика сплошных сред. 2009. **2**, №4. C. 92.
[3] *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теоретическая физика. **VI**. Гидродинамика. М.: Наука, 1986.
[4] *Мандельштам Л. И., Леонтович М. А.* ЖЭТФ. 1937. **7**, №3. C. 438.
[5] *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теоретическая физика. **VII**. Теория упругости. М.: Наука, 1987.
[6] *Maximov G.* In: Hydrodynamics – Advanced Topics. Ed. H. E. Schulz, co-eds A. L. A.de Simxes, R. J. Lobosco. InTech, 2011. P. 35.
[7] *Максимов Г. А., Ларичев В. А.* Вестн. Нижегор. ун-та им. Н. И. Лобачевского. 2011. №4. Ч. 4. C.1594.

The phase transition from visco–elasticity to plasticity. Description based on the generalized variational principle for dissipative continuum mechanics

G. A. Maximov
Andreyev Acoustic Institute. Moscow, 117036, Russia
E-mail: gamaximov@mail.ru

It is shown in the report that the phase transition from the viscoelastic behavior of a medium to the plastic one can be described on the basis of generalized variational principle (GVP) for dissipative continuum mechanics in terms of nonlinear relaxation of internal microrotations of material points. The motion equations derived in the linear approximation on the basis of GVP correspond to the visco-elastic medium, which special case is the Maxwell's medium with the low-frequency behavior as for conventional viscous fluid. It is shown how it is possible to achieve the phase transition from visco-elastic behavior of a medium to its plastic behavior at shear deformation increasing only by the desired functional dependence of shear nonlinearity.

PACS: 43.25.Ba, 64.60.Bd
Keywords: plasticity, viscoelastisity, phase transition, generalised variational principle.
Received 11 July 2017.

Сведения об авторе

Максимов Герман Адольфович — доктор физ.-мат. наук, нач. отдела; e-mail: gamaximov@mail.ru.