

Изучение поведения дисперсионных кривых квазидипольных мод анизотропного волновода с помощью полуаналитического метода конечных элементов

Т. В. Жарников^{1,*}, Д. Е. Сыресин^{2,†}, А. А. Никитин^{3,‡}, А. А. Дорофеева^{1,4,§}

¹*Schlumberger Moscow Research, Россия, 119285, Москва, ул. Пудовкина, д. 13*

²*Schlumberger Kabushiki Kaisha, 2-2-1 Fuchinobe, Chuo, Sagamihara, Kanagawa 252-0206, Japan*

³*Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, геологический факультет, кафедра акустики Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2*

⁴*Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет, кафедра акустики Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2*

(Статья поступила 05.07.2017; Подписана в печать 13.09.2017)

В данной работе исследуются особенности поведения дисперсионных кривых квазидипольных мод эллиптических анизотропных волноводов. с помощью полуаналитического метода конечных элементов показано, что вблизи точки сближения дисперсионных кривых они не пересекаются, а отталкиваются. Отталкивание сопровождается вращением поляризации мод при изменении частоты. Причиной такого поведения является отсутствие в модели точной симметрии. Пересечение возможно только в моделях с точной симметрией. Предложенный сценарий пересечения дисперсионных кривых важен для геофизических задач, поскольку может быть альтернативой общепринятому сценарию, когда пересечение кривых вызвано преднапряжением вмещающей среды.

PACS: 43.20.Mv, 02.70.Dh, 43.20.Ks. УДК: 534.213.4 534.1, 534.2

Ключевые слова: анизотропный волновод, SAFE, дисперсионные кривые.

ВВЕДЕНИЕ

Задача анализа дисперсионных кривых мод анизотропных волноводов возникает в неразрушающем контроле, структурном анализе и т.д. Ее актуальность в геофизике обусловлена анизотропией пород и сложной формой сечения скважин. Обычно для решения такой задачи применяется или теория возмущений, или трехмерное численное моделирование [1–3]. Недавно для ее решения также были применены псевдоспектральный метод и метод, основанный на обобщении уравнения Риккати для оператора матричного импеданса [4, 5]. Активно используются вариационные методы [6]. Их идея состоит в том, что, используя трансляционную инвариантность волновода, задача сводится к двумерной постановке. Вариационный подход развился в семейство методов, одним из которых является полуаналитический метод конечных элементов (SAFE) [7–11]. Они были сформулированы для различных типов сред (упругие, вязкоупругие и т.д.) и типов анизотропии (наклонная трансверсальная изотропия (TTI), орторомбическая и т.д.) и показали свою эффективность при изучении волноводов и их свойств. По видимому, впервые к задачам геофизики метод SAFE был применен в работе [12].

В работе исследуется поведение квазидипольных мод волновода с эллиптическим сечением в анизотропной среде. Для таких мод профиль давления близок

к дипольному [1, 2]. Схематический рисунок модели приведен на рис. 1.

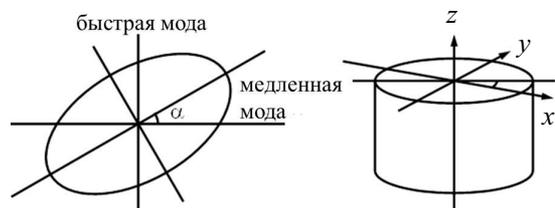


Рис. 1: Схематическое изображение модели

Основная задача состояла в выяснении возможности пересечения дисперсионных кривых и физических механизмов, отвечающих за это. Метод SAFE существенно упрощает ее решение, поскольку анализ волновода со сложным сечением другими методами затруднителен. Поскольку изменение диаметра волновода ведет к изменению характерного масштаба частот дисперсионной кривой, можно ожидать, что при вращении осей эллипса с достаточно большим аспектным соотношением дисперсионные кривые двух квазидипольных мод практически пересекутся. Эффект пересечения дисперсионных кривых известен, например, из изучения анизотропии скважин, вызванной напряженным состоянием породы [13]. С другой стороны, если симметрия не является точной, то нет причин для вырождения собственных значений. Ранее было показано, что близость собственных значений приводит к связи собственных мод [2]. Такая связь снимает вырождение и приводит к отталкиванию дисперсионных кривых фазовой скорости. Расчеты показывают, что такая же ситуация имеет место в данной задаче: дисперсионные кривые отталкиваются, а не пересекаются вблизи точки их сближения.

*E-mail: tzharnikov@slb.com

†E-mail: dsyresin@slb.com

‡E-mail: nikitin@geol.msu.ru

§E-mail: aa.dorofeeva@physics.msu.ru

1. ФОРМУЛИРОВКА МЕТОДА SAFE

Полуаналитический метод конечных элементов (SAFE) основан на вариационной формулировке задачи [7–11]. Будем следовать обобщенному принципу Гамильтона для анизотропной упругой среды, который выглядит следующим образом:

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta \{T - U + W\} dt = 0. \quad (1)$$

Здесь T , U , и W — кинетическая энергия, потенциальная энергия и работа, произведенная объемными и поверхностными силами, соответственно:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \int_V dV \rho \dot{\mathbf{u}}^* \dot{\mathbf{u}}, \\ U &= \frac{1}{2} \int_V dV \rho \boldsymbol{\varepsilon}^* \boldsymbol{\sigma}, \\ W &= \int_V dV \mathbf{u}^* \mathbf{f} + \int_{\partial V} d\mathbf{s} \mathbf{u}^* \mathbf{t}. \end{aligned} \quad (2)$$

В этих формулах ρ обозначает плотность среды, \mathbf{u} — поле смещений, \mathbf{f} и \mathbf{t} — объемные силы и поверхностные напряжения, соответственно, а символ $*$ — эрмитово сопряжение. Связь тензора напряжений $\boldsymbol{\sigma}$ с тензором деформаций $\boldsymbol{\varepsilon} = (\mathbf{L}_x \partial_x + \mathbf{L}_y \partial_y + \mathbf{L}_z \partial_z) \mathbf{u}$ и тензора модулей упругости \mathbf{C} определяется уравнением $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon}$ (обобщенный закон Гука). Матрицы операторов \mathbf{L}_x , \mathbf{L}_y и \mathbf{L}_z приведены в работе [10]. Для опи-

сания невязкой жидкости введем потенциал скоростей ϕ : $\dot{u}_i = -\partial_i \phi$ [12]. Давление жидкости p , ее кинетическая и потенциальная энергии определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \int_V dV \rho \partial_i \phi^* \partial_i \phi, \\ U &= \frac{1}{2} \int_V dV \frac{\rho^2}{\lambda} \dot{\phi}^* \dot{\phi}, \quad p = \rho \dot{\phi}, \end{aligned} \quad (3)$$

где ρ и λ — плотность и объемный модуль сжатия жидкости, соответственно.

Граничные условия и условия на границах раздела сред учитываются в зависимости от их конкретного вида. Так, жестким граничным условиям отвечает условие $u_i = 0$ на границе. Наличие границы раздела ∂V между твердой (s) и жидкой (f) средами учитывается введением членов, описывающих вариации работ, произведенных жидкостью над твердым телом и наоборот, и приравниванием их суммы к нулю [12]:

$$- \int_{\partial V}^{(f)} ds \rho \dot{\phi}^* (\mathbf{n} \mathbf{u}) + \int_{\partial V}^{(s)} ds \rho \dot{\phi} (\mathbf{n} \delta \mathbf{u}^*). \quad (4)$$

После интегрирования по частям членов, содержащих пространственные производные вариаций, вариационный принцип в случае наличия границы раздела твердая среда-жидкость примет вид

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \left[\int_V^{(f)} dV \partial_i \delta \phi^* \rho \partial_i \phi + \int_V^{(f)} dV \delta \phi^* \frac{\rho^2}{\lambda} \ddot{\phi} - \int_V^{(s)} dV \delta \mathbf{u}^* \rho \ddot{\mathbf{u}} - \int_V^{(s)} dV \delta \boldsymbol{\varepsilon}^* \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon} + \int_{\partial V}^{(f)} ds \rho \delta \phi^* (\mathbf{n} \dot{\mathbf{u}}) + \int_{\partial V}^{(s)} ds \rho \dot{\phi} (\mathbf{n} \delta \mathbf{u}^*) \right] dt = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

В большинстве практически интересных случаев данное уравнение решается численно, например, методом конечных элементов [7]. При этом трансляционная инвариантность волновода позволяет ограничиться дискретизацией только в сечении, перпендикулярном к оси волновода. В данной работе используются треугольные элементы. Поле смещений внутри одного элемента сетки аппроксимировалось следующим образом:

$$\mathbf{u}(x, y, k, w) = \mathbf{N}(x, y) \mathbf{u}(k, w) e^{i(kz - wt)}. \quad (6)$$

Здесь $\mathbf{N}(x, y) = \bar{\mathbf{N}} \otimes \mathbf{E}_3$ обозначает тензорное произведение вектора $\bar{\mathbf{N}} = (N_1, \dots, N_n)^T$, составленного из функций формы $N_i(x, y)$, и 3×3 единичной матрицы \mathbf{E}_3 , $\mathbf{u} = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)^T$ обозначает массив векторов смещений $\mathbf{u}_i = (u_{xi}, u_{yi}, u_{zi})$ в узлах элемента, а n обозначает общее

число узлов в элементе. Остальные физические поля и их вариации аппроксимируются аналогичным способом. Подставляя эти аппроксимации в выражение (5), собирая вклады всех элементов и учитывая то, что вариации могут быть произвольными, после алгебраических преобразований и перехода в частотную область получим систему линейных уравнений [10, 12]:

$$(\mathbf{K}_1 + ik\mathbf{K}_2 + k^2\mathbf{K}_3 - w^2\mathbf{M} + iw\mathbf{P})\mathbf{U} = 0. \quad (7)$$

Здесь \mathbf{U} обозначает вектор, составленный из значений поля смещений и потенциала скоростей во всех узлах сетки. Проиллюстрируем вычисление вкладов в полные матричные коэффициенты на примере элемента твердой среды. В этом случае тензор смещений выражается следующим образом:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varepsilon} &= (\mathbf{B}_1 + ik\mathbf{B}_2)\mathbf{u}, \\ \mathbf{B}_1 &= \mathbf{L}_x\partial_x\mathbf{N} + \mathbf{L}_y\partial_y\mathbf{N}; \quad \mathbf{B}_2 = \mathbf{L}_z\mathbf{N}.\end{aligned}\quad (8)$$

После ряда алгебраических преобразований вклады могут быть представлены в виде:

$$\begin{aligned}\mathbf{K}_1^e &= \int_V^{(e)} dV \mathbf{B}_1^* \mathbf{C} \mathbf{B}_1, \\ \mathbf{K}_2^e &= \int_V^{(e)} dV (\mathbf{B}_1^* \mathbf{C} \mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_2^* \mathbf{C} \mathbf{B}_1), \\ \mathbf{K}_3^e &= \int_V^{(e)} dV \mathbf{B}_2^* \mathbf{C} \mathbf{B}_2, \quad \mathbf{M}^e = \int_V^{(e)} dV \mathbf{N}^* \rho \mathbf{N}, \\ \mathbf{P}^e &= \int_{\partial V}^{(e)} ds \mathbf{N}_{\partial V}^* \rho_f \mathbf{n}^T \mathbf{N}_{\partial V}.\end{aligned}\quad (9)$$

Матрица \mathbf{P} возникает в результате дискретизации двух последних членов в уравнении (5) и определяет условия непрерывности нормальных напряжений и смещений на границе раздела жидкость-твердая среда. Для ее вычисления используются функции формы $N_{\partial V_i}$, являющиеся ограничением функций формы элемента на его границу.

При отсутствии внешних нагрузок, уравнение (7) представляет собой обобщенную полиномиальную задачу на собственные значения. Собственные значения оператора, входящего в уравнение (7), могут быть вычислены стандартными алгоритмами [8, 11]. Собственные значения можно разбить на пары с противоположными знаками, что соответствует распространению волн в двух противоположных направлениях.

2. АНАЛИЗ ДИСПЕРСИОННЫХ КРИВЫХ КВАЗИДИПОЛЬНЫХ СОБСТВЕННЫХ МОД ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ВОЛНОВОДА, ЗАПОЛНЕННОГО ЖИДКОСТЬЮ

Рассмотрим волновод, помещенный в однородную упругую среду, обладающую наклонной трансверсальной изотропной анизотропией (тип ТТИ). Такие среды служат моделью слоистых сред и часто встречаются в геофизических задачах [1, 2]. В качестве такой среды далее рассмотрим глинистый сланец (Bakken shale) со значениями плотности и упругих модулей (в декартовых координатах): $\rho = 2230 \text{ кг/м}^3$, $C_{11} = 40.9 \text{ ГПа}$, $C_{13} = 8.5 \text{ ГПа}$, $C_{33} = 26.9 \text{ ГПа}$, $C_{44} = 10.5 \text{ ГПа}$ и $C_{66} = 15.3 \text{ ГПа}$ [1, 2]. Для воды будем полагать: $\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$ и $\lambda = 2.25 \text{ ГПа}$. Результаты расчетов будем представлять в виде зависимости медленности s (обратной величины к скорости) от частоты f .

Вначале рассмотрим точность вычисления дисперсионных кривых методом SAFE. Для этого численные результаты для заполненного жидкостью цилиндрического волновода с радиусами $R_{b1} = 0.1016 \text{ м}$

и $R_{b2} = 0.127 \text{ м}$ сравним с результатами, полученными псевдоспектральным методом, и низкочастотными асимптотиками собственных мод [4]. Ось симметрии ТТИ среды выберем перпендикулярной оси волновода. Это соответствует ориентации слоев вдоль плоскости yz и случаю горизонтальной трансверсальной изотропии (НТИ). Дисперсионные кривые квазимонопольной (верхняя черная кривая) и двух квазидипольных (две нижних кривых, красная и синяя) мод показаны на рис. 2, который показывает, что результаты, полученные обоими методами, хорошо согласуются. Также видно хорошее совпадение низкочастотных асимптотик с их точными значениями.

Рассмотрим теперь поведение квазидипольных мод эллиптического волновода, помещенного в ту же среду. Малую и большую полуоси обозначим R_{b1} и R_{b2} , соответственно. На схеме модели, изображенной на рис. 1, α означает угол между большой осью и направлением поляризации медленной плоской сдвиговой волны, распространяющейся в породе в направлении оси волновода. Был рассмотрен ряд моделей, в которых угол α менялся от 90° до 0° . На рис. 3 и 4 показаны дисперсионные кривые и профили давления в скважине. Дисперсионные кривые быстрых и медленных квазидипольных мод пересекаются только при $\alpha = 90^\circ$. Во всех остальных случаях они сначала сближаются друг с другом, а затем отдаляются после точки сближения. Вычисления также показывают, что для любого угла $\alpha \neq 0$ или $\alpha \neq 90^\circ$ поляризация квазидипольных мод зависит от частоты.

Эти результаты можно объяснить следующим образом. Поскольку при низких частотах длина волны велика по сравнению с диаметром волновода, низкочастотное поведение собственных мод не зависит ни от формы, ни от ориентации сечения волновода (то есть от α). Низкочастотные асимптотики дисперсионных кривых и поляризация мод определяются только модулями упругости вмещающей среды и находятся из решений уравнений Кристоффеля для плоских qSV и SH волн. Известно, что их поляризация лежит в плоскостях симметрии среды НТИ [1, 13]. Это согласуется с данными расчетов. Например, поляризации мод на частоте 2 кГц лежат в плоскостях xz и yz (рис. 4). с ростом частоты возрастает влияние формы волновода. Естественно ожидать, что характерный масштаб частот дисперсионной кривой определяется диаметром сечения в направлении, совпадающем с ориентацией моды. Это можно понять, если рассмотреть предельный случай большого аспектного отношения. В предельных случаях $\alpha = 0^\circ$ и $\alpha = 90^\circ$ плоскости зеркальной симметрии сечения и среды совпадают. В результате имеются плоскости симметрии и можно разделить моды на два класса — симметричные и антисимметричные по отношению к зеркальному отражению. Их поляризация не меняется с частотой, что подтверждается расчетами. В случае $\alpha = 0^\circ$ медленная мода поляризована вдоль большой оси, а быстрая мода — вдоль малой. Поскольку чем больше диаметр,

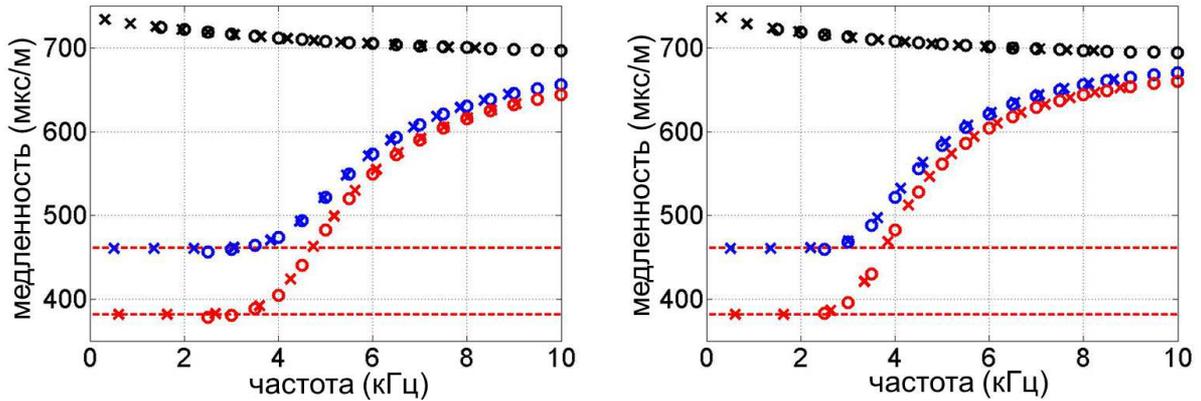


Рис. 2: Дисперсионные кривые квази Стоунли и двух квазидипольных мод скважин с радиусом R_{b1} (слева) и R_{b2} (справа) в среде НТИ глинистый сланец. Результаты, полученные методом SAFE и псевдоспектральным методом, обозначены кружками и крестиками, соответственно. Низкочастотные асимптотики квазидипольных мод изображены пунктирной линией

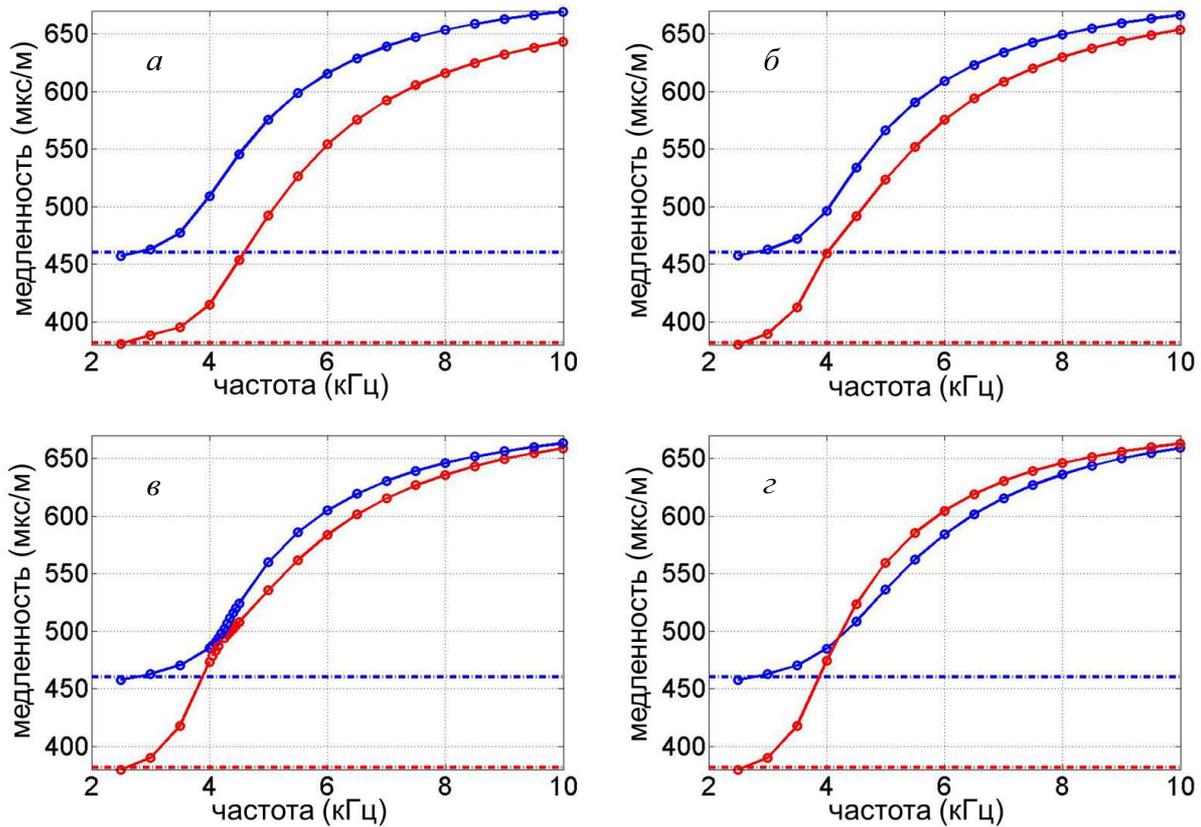


Рис. 3: Дисперсионные кривые квазидипольных мод эллиптического волновода в среде НТИ глинистый сланец для α : $a - 0$, $б - 60$, $в - 85$, и $г - 90$. Горизонтальные линии обозначают низкочастотные асимптотики

тем меньше масштаб частот для дисперсионной кривой (рис. 2), дисперсионные кривые этих двух мод не пересекаются. Отметим, что дисперсионная кривая медленной моды близка к дисперсионной кривой медленной моды в цилиндрической скважине радиуса R_{b2} , тогда как дисперсионная кривая быстрой моды близка

к дисперсионной кривой быстрой моды в цилиндрической скважине радиуса R_{b1} . При $\alpha = 90^\circ$ ситуация становится обратной и приводит к пересечению указанных дисперсионных кривых. Вырождение собственных значений в точке их пересечения вызвано точной симметрией, которая делает невозможным вращение по-

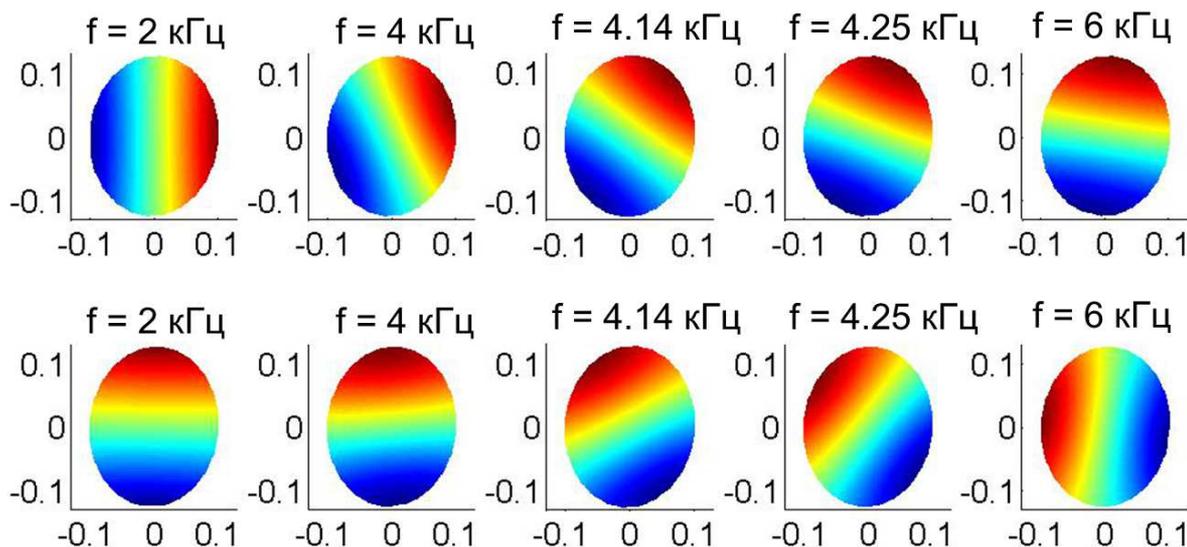


Рис. 4: Карты поля давления для квазидипольных мод эллиптической скважины в среде НТИ глинистый сланец, $\alpha = 85^\circ$. Верхний и нижний ряды относятся к медленной и быстрой модам, соответственно

ляризации мод. При прочих значениях α симметрия нарушается, моды зацепляются и не могут быть разделены на независимые классы. Связь тем слабее, чем α ближе к 90° . В окрестности 90° она может быть описана в рамках теории возмущений, согласно которой вырождение снимается и совпадающие собственные значения расщепляются на два близких, но разных. Поэтому дисперсионные кривые сначала приближаются друг к другу, а затем снова расходятся. Расчеты показывают, что с возрастанием частоты в окрестности точки сближения (около 4.2 кГц), плоскость поляризации квазидипольных мод поворачивается от ориентации низкочастотной асимптотики до ориентации геометрической плоскости симметрии. На рис. 4 (верхний ряд) видно, как ориентация моды вращается от низкочастотной асимптотики при 2 кГц к большой оси при 6 кГц. Из-за этого наклон дисперсионной кривой медленной моды увеличивается, а наклон быстрой моды уменьшается, что позволяет избежать пересечения дисперсионных кривых. Смена поляризации моды довольно резкая и лежит в диапазоне частот 2–6 кГц, в котором длина волны сравнима с характерным диаметром волновода. Такое поведение проиллюстрировано на рис. 3 и 4, на которых видно, что при низких и высоких частотах, а также непосредственно до и после точки сближения, моды хорошо разделены. Чем ближе α к 90° , тем резче переход и тем меньше минимальное расстояние между дисперсионными кривыми.

Для $\alpha = 85^\circ$ такой переход происходит между 4 кГц и 4.25 кГц. Когда α близко к 90° , такой переход приводит практически к обмену поляризациями двух квазидипольных мод слева и справа от точки сближения (рис. 4). При дальнейшем уменьшении α описанный сценарий по-прежнему работает, просто увеличивается ширина переходной зоны.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Продемонстрирована эффективность метода SAFE для расчета дисперсионных кривых анизотропных волноводов со сложным сечением. С помощью численных расчетов подробно исследована область сближения дисперсионных кривых квазидипольных мод эллиптического волновода и показано, что они отталкиваются. Показано, что такое отталкивание сопровождается вращением плоскости поляризации мод. Подтверждено, что такое поведение является следствием нарушения симметрии задачи, которое снимает вырождение собственных значений. Описанный сценарий представляет существенный интерес для геофизических приложений как альтернатива общепризнанному сценарию пересечения дисперсионных кривых, обусловленному преднапряженным состоянием среды.

[1] Ellefsen K. J., Cheng C. H., Toksoz M. N. J. Geophys. Res. 1991. **96**. P. 537.

[2] Norris A. N., Sinha B. K. J. Geophys. Res. 1996. **101**. P. 15945.

- [3] *Mallan R.K., Torres-Verdin C., Ma J.* Geophysics 2011. **76**. P. E127.
[4] *Zharnikov T.V., Syresin D.E., Hsu C.-J.* J. Acoust. Soc. Am. 2013. **134**. P. 1739.
[5] *Zharnikov T.V., Syresin D.E.* Wave Motion 2015. **52**. P. 1.
[6] *Nigro N.J.* J. Acoust. Soc. Am. 1966. **40**. P. 1501.
[7] *Zienkiewicz O.C., Taylor R.L.* The Finite Element Method, 2nd ed. Krieger Publishing Company, Inc., Malabar, FL, 1990.
[8] *Huang K.H., Dong S.-B.* J. Sound Vib. 1984. **96**. P. 363.
[9] *Finnveden S.* J. Sound Vib. 2004. **273**. P. 51.
[10] *Bartoli I., Marzani A., di Scalea F.L., Viola E.* J. Sound Vib. 2006. **295**. P. 685.
[11] *Treysede F., Laguerre L.* J. Acoust. Soc. Am. 2013. **133**. P. 3827.
[12] *Ellefsen K.J., Cheng C.H., Toksoz M.N.* J. Acoust. Soc. Am. 1991. **89**. P. 2597.
[13] *Kostek S., Sinha B.K.* Geophysics 1996. **61**. P. 1899.

The behavior of the dispersion curves of quasidipole mode of anisotropic waveguide studied by semianalytical finite element method

T. V. Zharnikov^{1,a}, D. E. Syresin^{2,b}, A. A. Nikitin^{3,c}, A. A. Dorofeeva^{1,4,d}

¹*Schlumberger Moscow Research. Moscow 119285, Russia.*

²*Schlumberger Kabushiki Kaisha, 2-2-1 Fuchinobe, Chuo, Sagamihara, Kanagawa 252-0206, Japan*

³*Department of acoustics, Faculty of Geology, Lomonosov Moscow State University. Moscow 119991, Russia*

⁴*Department of acoustics, Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University. Moscow 119991, Russia*

E-mail: ^atzharnikov@slb.com, ^bdsyresin@slb.com, ^cnikitin@geol.msu.ru, ^daa.dorofeeva@physics.msu.ru

In this study, repulsion of phase-velocity dispersion curves of quasidipole eigenmodes of waveguides with elliptic cross section in non-axisymmetric anisotropic medium is investigated. The modeling done by the semianalytical finite element technique reveals that in the vicinity of the near-crossover point the dispersion curves repulse rather than cross. The repulsion is accompanied by the rotation of the polarization of two quasidipole modes with frequency. The reason for such a behavior is the lack of symmetry in the model. The crossing is possible only in the models with the exact symmetry. Proposed scenario is important for geophysical problems, because it is the alternative to the well-known stress-induced anisotropy crossing of the dispersion curves.

PACS: 43.20.Mv, 02.70.Dh, 43.20.Ks.

Keywords: anisotropic waveguide, SAFE, dispersion curves.

Received 05 July 2017.

Сведения об авторах

1. Жарников Тимур Вячеславович — канд. физ.-мат. наук, ст. науч. сотрудник; тел.: (495) 935-82-00, e-mail: tzharnikov@slb.com.
2. Сыресин Денис Евгеньевич — канд. физ.-мат. наук, науч. сотрудник; тел.: 81-42-759-58-96, e-mail: dsyresin@slb.com.
3. Никитин Анатолий Алексеевич — канд. физ.-мат. наук, ст. науч. сотрудник; тел.: (495) 939-40-03, e-mail: nikitin@geol.msu.ru.
4. Дорофеева Алиса Александровна — студент; e-mail: aa.dorofeeva@physics.msu.ru.