Построение функций Грина неоднородного акустического слоя на упругом полупространстве

В. Ю. Приходько*

Московский институт радиотехники, электроники и автоматики (технологический университет), кафедра высшей математики Россия, 119454, Москва, проспект Вернадского, д. 78

(Статья поступила 30.06.2017; Подписана в печать 12.09.2017)

В работе излагается метод построения функций точечного источника звуковых волн в неоднородных средах. Основные результаты получены для случая неоднородного акустического слоя, лежащего на неоднородном полупространстве с переменной по глубине плотностью и скоростью звука. Найдены функциональные соотношения, связывающие характеристики звуковых полей с упругими и спектральными характеристиками неоднородного полупространства. Исследование проводится при помощи обобщенных соотношений ортогональности для векторных нормальных волн в стратифицированных средах. Используются формулы Грина для неоднородного уравнения Гельмгольца и формулы Бетти для уравнений теории упругости

PACS: 02+40+43 УДК: 621.372.8

Ключевые слова: неоднородные среды, обобщенные соотношения ортогональности, нормальные волны, формулы Бетти.

ВВЕДЕНИЕ

Строгая математическая постановка задач распространения волн в слоистых средах связана со значительными трудностями, возникающими из-за описания материальных параметров разрывными и обобщенными функциями. Например, в уравнения движения входят дивергенция плотности, градиенты параметров Ляме, дельта функции Дирака [1, 2]. Это приводит к краевым задачам и задачам Коши с разрывными коэффициентами. Возникает ряд вопросов, связанных с существованием и единственностью решений таких задач. Методы, дающие решения с явно входящими производными материальных параметров, могут привести к появлению некоторых фиктивных источников звука, так называемых ложных каустик и других особенностей звукового поля [3]. Для устранения этих трудностей в настоящей работе используется формы уравнений движения, не содержащих производных материальных характеристик.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается следующая модель неоднородной среды. В декартовой системе координат (x, y, z) водный слой $H_1 \geq z \geq 0$ имеет переменные по глубине плотность $\rho(z)$ и скорость звука $c(z)$. При $H_2 \geq z > H_1$ расположен упругий неоднородный слой с переменной плотностью $\rho_1(z)$ и параметрами Ляме $\lambda_1(z)$ и$\mu_2(z)$. Все функции являются кусочно-непрерывными функциями. При $z > H_2$ расположено упругое полупространство с постоянными ρ_2,λ_2 и μ_2. Относительно значений λ_2 и μ_2 предположим, что они на порядок больше модуля объемного сжатия воды, а величины $\lambda_1(z)$ и $\mu_2(z)$ находятся в промежутке между ними. Эти предположения не имеют принципиального значения и необходимы лишь для существования незатухающих нормальных волн.

Звуковое давление $p(x, y, z)$ в акустическом слое удовлетворяет уравнениям

$$\operatorname{grad} p + \rho\omega^2 U = -\frac{1}{4\pi}\delta(z - z')\delta(x - x'), \qquad (1)$$

$$\operatorname{div} U + \frac{1}{\rho c^2} p = 0, \qquad (2)$$

где U — смещения в акустическом слое.

Будем использовать уравнения движения упругой среды в форме Эйлера [1]

$$\operatorname{div}\sigma + \rho_p\omega^2 u = 0. \qquad (3)$$

Здесь σ — тензор напряжений, u — вектор смещений упругой среды, связь между которыми задается законом Гука.

На границе между акустической и упругой средой должны выполняться условия непрерывности нормальных смещений и напряжений и равенство нулю тангенциальных напряжений в упругом слое.

Система уравнений (1–3), в отличие от эквивалентных им уравнений в смещениях, не содержит производных материальных параметров. Для учета краевых условий и условия контакта различных сред нужно выбрать какой-либо один, базисный столбец тензора напряжений. Таким столбцом в рассматриваемом здесь случае является первый столбец тензора напряжений. Этот столбец является вектором нормальных напряжений, действующим на плоскость, перпендикулярную оси x.

*E-mail: prikhodi@mail.ru

2. РАСЧЕТ АМПЛИТУД НОРМАЛЬНЫХ МОД

Для решения краевой задачи (1)–(3) необходимо разложить дельта–функцию Дирака, стоящую в правой части (1), в ряд по нормальным волнам волновода. Проиллюстрируем метод на примере стационарного, плоскослоистого случая уравнений движения (зависимость от времени в виде $\exp(-i\omega t)$ везде опускается).

Векторными нормальными волнами называются решения однородных уравнений движения следующего вида

$$u\left(x,z,\alpha\right)=v\left(z,\alpha\right)\exp\left(i\alpha x\right), \tag{4}$$

гдеα — волновое число нормальной волны, $v\left(z,\alpha\right)$ — собственная функция поперечного сечения. Такие решения удовлетворяют краевым условиям на границах раздела и условиям затухания на бесконечности.

Будем искать функцию Грина при помощи соотношений ортогональности для нормальных волн [4]

$$\iint_D \left(\left(\sigma_1\left(x_2,x_3,\alpha\right),v\left(x_2,x_3,\beta\right)\right)-\right.$$
$$\left.-\left(\sigma_1\left(x_2,x_3,\beta\right),v\left(x_2,x_3,\alpha\right)\right)\right)dx_2dx_3=0. \tag{5}$$

Здесь волновые числа удовлетворяют условию $\alpha+\beta\neq 0$, σ_1 — нормальные напряжения, соответствующие смещениям нормальной волны. Столбцы вектора смещений в упругой среде представим в виде

$$u^{\pm}=\sum_{\alpha_n\in R}A_n^{\pm}v\left(z,\pm\alpha_n\right)\exp\left(\pm i\alpha_n x\right), \tag{6}$$

где знак $(+)$ соответствует смещениям в области $x>x'$, а знак минус в области $x<x'$; $A_n^{\pm}$ — неизвестные коэффициенты разложения, которые необходимо определить; R — множество всех α_n, которые смещаются в верхнюю полуплоскость при введении затухания в среде.

Для нахождения неизвестных коэффициентов применим к функции смещений $u\left(z,-\alpha\right)=v\left(z,-\alpha\right)\exp\left(-i\alpha x\right)$ и соответствующему столбцу тензора напряжений третью формулу Бетти в области $W_{a,b}\{a<x<b, 0\leq z<\infty\}, x'\in(a,b)$. В результате с учетом условий на поверхности акустического слоя и условий затухания на бесконечности, получаем

$$\begin{gathered} v_i\left(z',-\alpha_n\right)\exp\left(-\alpha_n x'\right)=\left(\Phi_a-\Phi_b\right); \\ \Phi_{a,b}=\int_0^{\infty}\left(\left(u^{\pm},\sigma_1(u)\right)-\left(u,\sigma_1(u^{\pm})\right)\right)dz. \end{gathered} \tag{7}$$

ИнтегралΦ_a можно вычислить подстановкой выражения (6) дляu^-:

$$\Phi_a=A_m^-\exp\left(ia\left(\alpha_m+\alpha_n\right)\right)\int_0^{\infty}\sum_{\alpha_m\in R}\left(\left(v\left(z,-\alpha_m\right),\sigma_1\left(z,-\alpha_n\right)\right)-\left(\sigma_1\left(z,-\alpha_m\right),v\left(z,-\alpha_n\right)\right)\right)dz=0$$

в силу соотношений ортогональности (5), если $\alpha_m+\alpha_n\neq 0$, а в случае равенства следует соотношение

$$A_{in}^-=\left(U_n\right)^{-1}v_i\left(z,\alpha_n\right)\exp\left(i\alpha_n x'\right) \tag{8}$$

где

$$U_n=\int_0^{\infty}\left(\left(v\left(z,-\alpha_n\right),\sigma_1\left(z,\alpha_n\right)\right)-\right.$$
$$\left.-\left(v\left(z,\alpha_n\right),\sigma_1\left(z,-\alpha_n\right)\right)\right)dz.$$

Аналогично вычисляем интеграл $\Phi_b=U_nA_{in}^+$, откуда следует

$$A_{in}^+=\left(U_n\right)^{-1}v_i\left(z,-\alpha_n\right)\exp\left(-i\alpha_n x'\right).$$

Таким образом, искомую функцию Грина, в области $x>x'$, на основании формул (6–8), можно представить в следующем виде

$$p=\sum_{\alpha_n\in R}\left(U_n\right)^{-1}v\left(z',\alpha_n\right)v\left(z,\alpha_n\right)\exp\left(i\alpha_n x\right),$$

где нормировочный коэффициент, представленный несобственным интегралом (8), можно разложить на сумму двух интегралов по толщине акустического и упругого слоев, а оставшийся несобственный интеграл по однородному полупространству вычисляется в квадратурах.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

При помощи обобщенных соотношений ортогональности найдены амплитуды нормальных волн в виде собственных интегралов от функций спектральных и материальных характеристик сред. В формулы не входят производные от кусочно-гладких характеристик материальных сред и производные вронскиана по спектральному параметру, известные в классических решениях. Амплитуды нормальных волн представлены в виде суммы трех интегралов, описывающих вклад каждой среды. Таким образом, можно определить персональные вклады полупространства, упругого и акустического слоев в каждую амплитуду нормальной волны. Вклад однородного полупространства найден в явном виде.

[1] *Бабич В. М.* Прикл. мат. мех. 1961. **25**, № 1. С. 38.
[2] *Толстой И., Клей К. С.* Акустика океана. М.: Мир. 1969.
[3] *Messino M. J.* JASA. 1973. N 45. P. 157.
[4] *Федорюк М. В.* Акуст. журн. 1974. **20**, № 2. С. 310.

Green's functions of the inhomogeneous acoustic layer on an elastic half–space

V. Yu. Prikhodko

Department of mathematic, Physics–technology institute, Moscow Institute of Radio Engineering, Electronics and Automation (Technical University
Moscow 117454, Russia
E-mail: prikhodi@mail.ru

In this paper, we describe a method of constructing functions of a point source of sound waves in inhomogeneous media. The main results obtained for the case of inhomogeneous acoustic layer lying on an inhomogeneous half–space with variable on depth density and speed of sound. Found functional relationships between the characteristics of the sound fields with elastic and spectral characteristics of the inhomogeneous half–space. The study is carried out using the generalized orthogonality relations for the vector of normal waves in stratified environments. Used the Green formula for the inhomogeneous Helmholtz equation and the formulas of Betty for the equations of elasticity theory.

PACS: 02+40+43
Keywords: inhomogeneous medium, the ratio of generalized orthogonality, the normal waves, formulas Betty.
Received 30 June 2017.

Сведения об авторе

Приходько Вячеслав Юстинович — доктор физ.-мат. наук, профессор; e-mail: prikhodi@mail.ru.