

Излучение диполя в волноводе

А. Д. Лапин*

Акустический институт имени академика Н. Н. Андреева
Россия, 117209, Москва, ул. Шверника, 4.

(Статья поступила 28.06.2017; Подписана в печать 12.09.2017)

Исследовано звуковое поле точечного диполя с моментом M в двух многомодовых волноводах — трубе с прямоугольным и трубе с круговым сечением, стенки обеих труб жесткие. Поле диполя получено дифференцированием поля монополя по координатам этого источника. Показано, что при приближении диполя с моментом M к жесткой стенке волновода пропадает излучение, обусловленное компонентой момента, перпендикулярной этой стенке. Рассчитана мощность излучения диполя в многомодовом волноводе, исследована зависимость этой мощности от частоты. Показано, что мощность излучения диполя в узкой (по сравнению с длиной звуковой волны) трубе равна $\rho c (kM)^2 (4S)^{-1}$, где k — волновое число, ρ и c — соответственно плотность заполняющей среды и скорость звука в ней, S — площадь поперечного сечения трубы, M — проекция момента диполя на ось этой трубы.

PACS: 43.20.+g

УДК: 534.26

Ключевые слова: монополь, диполь, многомодовый волновод.

ВВЕДЕНИЕ

Диполем называют пару монополей с объемными скоростями $-V$ и $+V$, расположенных на малом расстоянии l друг от друга. Ось, проведенную от монополя с объемной скоростью $-V$ к монополю с объемной скоростью $+V$ называют осью диполя. Звуковое поле диполя определяется моментом диполя M , равным произведению объемной скорости V и расстояния l между монополями. Одинаковое дипольное излучение можно осуществить при помощи различных пар противофазных монополей, подбирая объемные скорости монополей и расстояния между ними так, чтобы моменты были одинаковы [1, 2]. Если размеры диполя стремиться к нулю и одновременно увеличивать в обратном отношении объемные скорости составляющих монополей чтобы момент диполя не менялся, то неизменным будет оставаться и излучаемое поле. В результате получим «точечный» диполь с моментом $M = \lim V l$, $V \rightarrow \infty, l \rightarrow 0$.

Работа диполя в неограниченной однородной среде детально исследована в книге [1]. Ниже найдено звуковое поле точечного диполя с моментом M в двух многомодовых волноводах — трубе с прямоугольным и трубе с круговым сечением, стенки обеих труб жесткие. Поле диполя получено дифференцированием поля монополя по координатам этого источника. Обозначим через $p_0(\mathbf{r}_0, \mathbf{r})$ звуковое поле монополя с объемной скоростью V , радиусы-векторы $\mathbf{r}_0(x_0, y_0, z_0)$ и $\mathbf{r}(x, y, z)$ определяют положение излучателя и наблюдателя. Пусть монополи с объемными скоростями $-V$ и $+V$ расположены в близких точках, определяемых радиусами-векторами $\mathbf{r}_0$ и $\mathbf{r}_0 + \mathbf{l}$. При малом l звуковое поле этой пары противофазных

монополей (диполя) равно

$$p_0(\mathbf{r}_0 + \mathbf{l}, \mathbf{r}) - p_0(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}) \approx \\ \approx l \frac{\partial p_0}{\partial l^0} = l \{ \mathbf{l}^0 \nabla p_0 \} = V l \{ \mathbf{l}^0 \nabla (p_0/V) \},$$

где $\mathbf{l}^0$ — орт по оси диполя, ∇ — оператор Гамильтона, градиент поля p_0 берется по координатам x_0, y_0, z_0 . Если размеры диполя стремиться к нулю и одновременно увеличивать в обратном отношении объемные скорости составляющих монополей чтобы момент диполя не менялся, то неизменным будет оставаться и излучаемое поле. Звуковое поле точечного диполя в волноводе равно

$$p = M \{ \mathbf{l}^0 \nabla (p_0/V) \} = M \nabla (p_0/V), \quad M = M \mathbf{l}^0. \quad (1)$$

Рассчитаем поле диполя в волноводе с прямоугольным сечением и абсолютно жесткими стенками. Выберем систему координат так, чтобы две стенки волновода совпадали с координатными плоскостями $y = 0$ и $z = 0$. Длины сторон поперечного сечения волновода обозначим через h_y и h_z . Диполь с заданным моментом $M(M_x, M_y, M_z)$ расположен в точке (x_0, y_0, z_0) . Согласно [1], поле монополя, расположенного в этой точке, равно

$$p_0 = \sum_{m,n} \frac{2k\rho c V}{h_y h_z \varepsilon_m \varepsilon_n \xi_{mn}} \cos(\varsigma_{ym} y_0) \cos(\varsigma_{zn} z_0) \times \\ \times \cos(\varsigma_{ym} y) \cos(\varsigma_{zn} z) \exp[i\xi_{mn} |x - x_0|], \quad (2)$$

где $\varsigma_{ym} = m\pi/h_y$, $\varsigma_{zn} = n\pi/h_z$, $\xi_m = \sqrt{k^2 - \varsigma_{ym}^2 - \varsigma_{zn}^2}$, $\varepsilon_0 = 2$, $\varepsilon_n = 1$ при $n \neq 0$.

Подставляя это поле в формулу (1), получим поле диполя

*E-mail: lapin1932@yandex.ru

$$p = - \sum_{m,n} \frac{2k\rho c}{h_y h_z \varepsilon_m \varepsilon_n \xi_{mn}} \{ i \xi_{mn} \text{sign}(x - x_0) M_x \cos(\varsigma_{ym} y_0) \cos(\varsigma_{zn} z_0) + \varsigma_{ym} M_y \sin(\varsigma_{ym} y_0) \cos(\varsigma_{zn} z_0) + \varsigma_{zn} M_z \cos(\varsigma_{ym} y_0) \sin(\varsigma_{zn} z_0) \} \cos(\varsigma_{ym} y) \cos(\varsigma_{zn} z) \exp [i \xi_{mn} |x - x_0|]. \quad (3)$$

Излучаемая мощность диполя в прямоугольной трубе равна

$$Q = \sum_{m,n}^* \frac{k\rho c}{h_y h_z \varepsilon_m \varepsilon_n \xi_{mn}} \{ [\xi_{mn} M_x \cos(\varsigma_{ym} y_0) \cos(\varsigma_{zn} z_0)]^2 + [\varsigma_{ym} M_y \sin(\varsigma_{ym} y_0) \cos(\varsigma_{zn} z_0) + \varsigma_{zn} M_z \cos(\varsigma_{ym} y_0) \sin(\varsigma_{zn} z_0)]^2 \}, \quad (4)$$

где звездочка над суммой означает, что суммирование производится только по распространяющимся модам ($\xi_{mn} > 0$). Из формул (3) и (4) следует, что при приближении диполя с моментом $\mathbf{M}$ к жесткой стенке волновода пропадает излучение, обусловленное компонентой момента, перпендикулярной этой стенке.

Рассчитаем поле диполя с моментом $\mathbf{M}$ в круглой

трубе с жесткой стенкой. Направим ось $\mathbf{z}$ цилиндрической системы координат r, φ, z по оси трубы, радиус трубы обозначим через a . Пусть момент диполя лежит в полуплоскости $\varphi = \varphi_0$, координаты диполя в этой полуплоскости обозначим через r_0 и z_0 . Поле монополя, расположенного в точке (r_0, φ_0, z_0) внутри трубы, получим методом Фурье [1, 2]. Оно равно

$$p_0 = \sum_{m,n} \frac{k\rho c V}{\pi a^2 \varepsilon_m \xi_{mn} T_{mn}} J_m(\varsigma_{mn} r_0) J(\varsigma_{mn} r) \cos[m(\varphi - \varphi_0)] \exp[i \xi_{mn} |z - z_0|], \quad (5)$$

где обозначено

$$T_{mn} \equiv \frac{2}{a^2} \int_0^a J_m^2(\varsigma_{mn} r) r dr = \{ J_m^2(\varsigma_{mn} a) - J_{m-1}(\varsigma_{mn} a) J_{m+1}(\varsigma_{mn} a) \} > 0,$$

$J_m(\varsigma r)$ — функция Бесселя, ς_{mn} — n -й корень уравнения $J'_m(\varsigma a) = 0$, $\xi_{mn} = \sqrt{k^2 - \varsigma_{mn}^2}$, $\varepsilon_0 = 2$, $\varepsilon_m = 1$ при $m \neq 0$, V — объемная скорость монополя. Подставляя это поле в формулу (1), получим поле диполя с моментом $\mathbf{M}(M_r, 0, M_z)$ в круглой трубе. В цилиндрических координатах градиент поля p_0 берется по координатам r_0, φ_0, z_0 . В результате имеем следующую формулу

$$p = \sum_{m,n} \frac{k\rho c}{\pi a^2 \varepsilon_m \xi_{mn} T_{mn}} \{ \varsigma_{mn} J'_m(\varsigma_{mn} r_0) M_r - i \xi_{mn} \text{sign}(z - z_0) J_m(\varsigma_{mn} r_0) M_z \} \times \\ \times J_m(\varsigma_{mn} r) \cos[m(\varphi - \varphi_0)] \exp[i \xi_{mn} |z - z_0|]. \quad (6)$$

Излучаемая мощность диполя в круглой трубе равна

$$Q = \sum_{m,n}^* \frac{k\rho c}{2\pi a^2 \varepsilon_m \xi_{mn} T_{mn}} \{ [\xi_{mn} J_m(\varsigma_{mn} r_0) M_z]^2 + [\varsigma_{mn} J'_m(\varsigma_{mn} r_0) M_r]^2 \}, \quad (7)$$

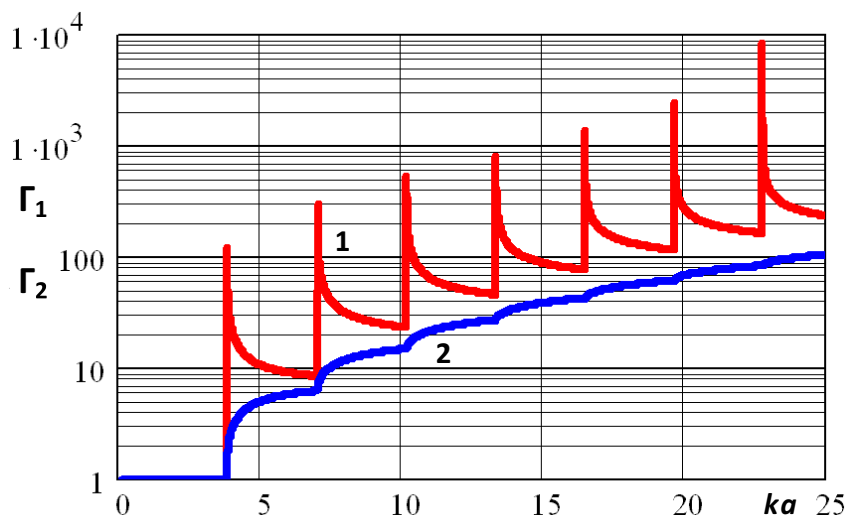
где звездочка над суммой означает, что суммирование производится только по распространяющимся модам ($\xi_{mn} > 0$). Из формул (6) и (7) следует, что при приближении диполя с моментом $\mathbf{M}$ к жесткой цилиндрической стенке трубы пропадает излучение, обусловленное компонентой M_r .

Согласно формулам (4) и (7), мощность излучения диполя в узкой (по сравнению с длиной волны) трубе

равна $(kM)^2 \rho c / 4S$, где S — площадь сечения трубы, M — проекция момента диполя на ось этой трубы. Мощность излучения монополя в такой трубе равна

$$V^2 \rho c / 4S.$$

Для примера исследуем частотную зависимость мощности излучения монополя и диполя, расположенных в начале координат, момент диполя направлен по

Рис. 1: Зависимости величин Γ_1 и Γ_2 от ka

оси трубы [3]. Звуковое поле этих источников состоит только из осесимметричных мод. Мощности излучения монополя и диполя получим по следующим простым формулам:

$$Q_1 = \frac{\rho c}{4S} V^2 \Gamma_1(ka), \quad \Gamma_1(ka) = 1 + \sum_{n=1}^N \frac{k}{\xi_n J_o^2(\zeta_n a)}, \quad (8)$$

$$Q_2 = \frac{\rho c}{4S} (kM)^2 \Gamma_2(ka), \quad \Gamma_2(ka) = 1 + \sum_{n=1}^N \frac{\xi_n}{k J_o^2(\zeta_n a)}, \quad (9)$$

где $\zeta_n \equiv \zeta_{0n}$, $\xi_n \equiv \xi_{0n}$, $(N+1)$ — число однородных осесимметричных мод в трубе.

Величина Γ_1 есть нормированное акустическое сопротивление излучения монополя в круглой трубе, величина Γ_2 характеризует интенсивность излучения диполя в этой трубе. Они определяются по формулам

$$\Gamma_1 = \frac{2S}{\rho c} \text{Re} p_0(0, 0, 0)/V, \quad \Gamma_2 = \frac{2S}{\rho c} \text{Re} v(0, 0, 0)/(kM),$$

$$v(r, \varphi, z) = (1/k) \partial p / \partial z.$$

Зависимости этих величин от параметра ka представлены на рис. 1.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Найдено звуковое поле точечного дипольного источника с моментом M в двух многомодовых волноводах — трубе с прямоугольным и трубе с круговым сечением, стенки обоих волноводов жесткие. Рассчитана мощность излучения диполя в многомодовом волноводе, исследована зависимость этой мощности от частоты.

- [1] Исакович М. А. Общая акустика. М.: Наука, 1973.
 [2] Ржевкин С. Н. Курс лекций по теории звука. Издательство Московского университета, 1960.
 [3] Лапин А. Д. Сечение рассеяния монополю-дипольного

резонатора с трением в многомодовом волноводе. Сб. тр. XXIV сессии РАО, Саратов. 2011. С. 190.

Radiation of a dipole in a waveguide

A. D. Lapin

N.N.Andreyev Acoustics Institute
 E-mail: lapin1932@yandex.ru

Investigated the sound field of a point dipole with moment M in two multimode waveguides — tube with a rectangular and tube with a circular cross-section, the wall of the both tubes are rigid. The field of the dipole obtained by the differentiation of

a field monopole on the coordinates this source. It is shown that the approach of the dipole with moment $\mathbf{M}$ to the rigid wall of the waveguide is lost radiation due to the component of the moment perpendicular to this wall. The calculated radiation power of a dipole in a multimode waveguide, investigated the dependence of this power on the frequency. It is shown that the radiation power of a dipole in a narrow (compared to the wavelength of sound) tube is equal to $\rho c (kM)^2 (4S)^{-1}$, where k is the wave number, ρ and c — consequently the density of filling medium and sound velocity in it, S — the cross-sectional area of the pipe, M — the projection of dipole moment on the axis of the tube.

PACS: 43.20.+g

Keywords: monopole, dipole, multimode waveguide.

Received 28 June 2017.

Сведения об авторе

Лапин Александр Дмитриевич — доктор физ.-мат. наук, профессор, гл. науч. сотрудник; тел.: (499) 723-65-11, доп. 0-04, e-mail: lapin1932@yandex.ru.