

## Анализ применимости принципа взаимности в векторно-скалярных полях мультипольных источников

Г. Н. Кузнецов<sup>1,\*</sup>, А. Н. Степанов<sup>2†</sup>

<sup>1</sup>Научный центр волновых исследований Института общей физики имени А. М. Прохорова РАН  
Россия, 119991, Москва, ул. Вавилова, д. 38

<sup>2</sup>Самарский национальный исследовательский университет имени академика С. П. Королёва (Самарский университет)  
Россия, 443086, Самара, Московское шоссе, д. 34.

(Статья поступила 26.07.2017; Подписана в печать 19.09.2017)

Исследуется применимость принципов взаимности (ПВ) в гидроакустическом волноводе для векторно-скалярных полей (ВСП) мультипольных источников (МИ). Показано, что МИ по этому принципу разделяются на две группы: в первой группе поля звукового давления (ЗД), горизонтальные проекции векторов колебательной скорости (ГП ВКС) удовлетворяют ПВ, а вертикальные проекции (ВП ВКС) этих векторов не удовлетворяют. Во второй группе ЗД и ГП ВКС принципу взаимности не удовлетворяют, а их ВП ВКС удовлетворяют. Градиенты фазы (ГФ) и углы прихода в вертикальной плоскости, в основном, ПВ не удовлетворяют.

PACS: 43.30.+m      УДК: 542.34

Ключевые слова: волновод, принципы взаимности, мультипольные источники, векторно-скалярные поля.

### ВВЕДЕНИЕ

Классические представления принципов (соотношений) взаимности для различных электромеханических систем и волновых полей, в частности акустических полей, сформулированы достаточно давно. Из современных работ можно выделить работу П. И. Коротина [1], где выполнен анализ использования ПВ в виброакустике и рассмотрены некоторые ограничения применимости ПВ, и теоретическую работу О. А. Година [2], в которой анализируются ПВ и принципы сохранения энергии поля в сложной системе «неоднородный поток жидкости–анизотропное твердое тело». Рассмотрим применимость ПВ для ВСП, образованных в волноводе объемным крупногабаритным источником. Его поле заменим эквивалентным, образованным МИ [3]. Исследуем численно применимость ПВ для пространственных распределений амплитуд ЗД, ВКС, для ГФ и угловых характеристик поля.

### ВЕКТОРНО–СКАЛЯРНЫЕ ПОЛЯ МУЛЬТИПОЛЯ В ВОЛНОВОДЕ

Пусть гармонический объемный источник излучает в волноводе Пекериса толщиной  $h$  в точке с декартовыми координатами  $(x_0, y_0, z_0)$  сигнал с круговой частотой  $\omega$ . Плоскость  $OXY$  декартовой системы совместим со свободной поверхностью волновода, а ее ось  $OZ$  направим вниз — к дну волновода. Сигналы от такого излучателя принимаются четырехкомпонентным

векторно-скалярным приёмником в точке с координатами  $(x, y, z)$ . Для волновода Пекериса в модовом приближении можно записать потенциал поля МИ в виде [3]:

$$\psi = \frac{4\pi}{kh} \sum_{n=0}^L \sum_{m=-n}^n \sum_{l=1}^N A_{nml} \sin \alpha'_{l0} \sin \alpha_l H_m^{(1)}(\zeta_l r) e^{im\varphi},$$

где

$$A_{nml} = -\frac{D_{nm} e^{i\pi(1-\chi_{nm})/4} x_l P_n^{(m)}(x_l/kh)}{\sin^2 x_l \operatorname{tg} x_l / \tilde{m}^2 + \sin x_l \cos x_l - x_l},$$

$$D_{nm} = (1/2) C_{nm} e^{i\pi(m-n)/2}, \quad \chi_{nm} = (-1)^{n+|m|},$$

$x_l$  — корни дисперсионного уравнения волновода Пекериса  $\operatorname{ctg} \zeta = i\sqrt{\zeta^2 - (kh\nu)^2} / \tilde{m}\zeta$ ,  $k$  — волновое число,  $\nu^2 = 1 - \tilde{n}^2$ ,  $\tilde{n} = n_0(1 + i\tilde{\alpha})$ ,  $n_0 = c_0/c$  — отношение скоростей звука в волноводе  $A_0$  и грунте  $A$ ,  $\tilde{\alpha}$  — коэффициент поглощения звука в грунте, по которому вычисляются модальные коэффициенты затухания,  $\tilde{m} = \rho/\rho_0$  — отношение плотностей  $\rho$  подстилающего полупространства и  $\rho_0$  воды,  $\alpha_l = x_l(z/h)$ ,  $\alpha'_{l0} = (\pi/4)(1 - \chi_{nm}) + \alpha_{l0}$ ,  $\alpha_{l0} = x_l(z_0/h)$ ,  $H_m^{(1)}$  — функция Ханкеля первого рода порядка  $m$ ,  $\zeta_l = k\sqrt{1 - x_l^2/k^2h^2}$  — горизонтальные волновые числа,  $r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$  — горизонтальное расстояние между источником и точкой наблюдения,  $\varphi = \operatorname{arctg}[(y - y_0)/(x - x_0)]$  — полярный угол. Определим поля ЗД и ортогональных проекций ВКС в виде [4]

$$P = i \frac{4\pi\omega\rho_0}{kh} \sum_{n=0}^L \sum_{m=-n}^n \sum_{l=1}^N A_{nml} \sin \alpha'_{l0} \sin \alpha_l H_m^{(1)}(\zeta_l r) e^{im\varphi}$$

$$V_r = \frac{4\pi}{kh} \sum_{n=0}^L \sum_{m=-n}^n \sum_{l=1}^N A_{nml} \zeta_l \sin \alpha'_{l0} \sin \alpha_l \left( m H_m^{(1)}(\xi_l r) / (\xi_l r) - H_{m+1}^{(1)}(\xi_l r) \right) e^{im\varphi},$$

$$V_z = \frac{4\pi}{kh} \sum_{n=0}^L \sum_{m=-n}^n \sum_{l=1}^N A'_{nml} \sin \alpha'_{l0} \cos \alpha_l H_m^{(1)}(\xi_l r) e^{im\varphi},$$

где  $A'_{nml} = x_l A_{nml} \text{ctg} \alpha_l / h$ . Формулы расчета градиентов  $\text{grad} \varphi$  поля ЗД получены в [4].

В соотношениях для ЗД и ВКС от аргументов  $z_0$  и  $z$  зависят только множители  $\sin \alpha_{l0} \sin \alpha_l$ ,  $\sin \alpha_{l0} \cos \alpha_l$  и  $\cos \alpha_{l0} \cos \alpha_l$ . В общем случае для произвольного МИ соблюдение или не соблюдение ПВ зависит от вида  $\alpha_{l0}$  для МИ. У МИ с чётным значением  $n + |m|$  его индексов параметр  $\chi_{nm} = (-1)^{n+|m|} = 1$ , поэтому  $\alpha'_{l0} = \alpha_{l0} = x_l(z_0/h)$  и поля ЗД и ГП ВКС удовлетворяют ПВ, а поле ВП ВКС — не удовлетворяет. У мультипольных источников с нечетным значением  $n + |m|$  его индексов параметр  $\chi_{nm} = (-1)^{n+|m|} = -1$ , поэтому  $\alpha'_{l0} = \pi/2 + \alpha_{l0}$ . Для таких МИ поля ЗД и ГП ВКС не удовлетворяют ПВ, а ВП ВКС — удовлетворяют.

Рассчитаем ВСП МИ в волноводе Пекериса толщиной  $h = 100$  м со скоростью звука в воде  $c_0 = 1450$  м/с. Для проверки выполнимости ПВ при замене  $z$  на  $z_0$  вычислим поля ЗД, ГП и ВП ВКС, ГФ в горизонтальной и вертикальной плоскости, а также углов прихода ВКС. Расчеты выполним при параметрах дна волновода:  $\tilde{m} = 1.8$ ;  $n_0 = 0.725$ ; коэффициент затухания  $\tilde{\alpha} = 0.02$ .

В первом случае горизонтальные координаты излучателя принимаются равными нулю:  $x_0 = 0$  и  $y_0 = 0$ , а его глубина  $z_0$  изменяется от свободной поверхности  $z_0 = 0$  до дна  $z_0 = h$ . Четырехкомпонентный векторно-скалярный приёмник или антенна находятся на глубине  $z = 50$  или  $100$  м на горизонтальных расстояниях  $r = 5$  или  $20$  км от источника.

Во втором случае источник (излучающая антенна) и приёмник меняются местами. На рис. 1 для монополя и рис. 2 для вертикального диполя представлены зависимости от  $z_0$  для первой схемы и от  $z$  — для второй. Используются обозначения и нумерация кривых: 1 — амплитуда ЗД  $|P(z_0)|_{z=\text{const}}$ ; 2 — амплитуда ЗД  $|P(z)|_{z_0=\text{const}}$ ; 3 — амплитуда ГП ВКС  $|V_r(z_0)|_{z=\text{const}}$ ; 4 — амплитуда ГП ВКС  $|V_r(z)|_{z_0=\text{const}}$ ; 5 — амплитуда ВП ВКС  $|V_z(z_0)|_{z=\text{const}}$ ; 6 — амплитуда ВП ВКС  $|V_z(z)|_{z_0=\text{const}}$ . Расчеты показали, что зависимости  $|P(z_0)|$  и  $|P(z)|$  (рис. 1, кривые 1 и 2) и  $|V_r(z_0)|$  и  $|V_r(z)|$  (рис. 1, кривые 3 и 4), оказались идентичными, т.е.  $|P(z_0)|_{z=\text{const}} = |P(z)|_{z_0=\text{const}}$  и  $|V_r(z_0)|_{z=\text{const}} = |V_r(z)|_{z_0=\text{const}}$ . Это подтверждает выполнение ПВ для амплитуд ЗД и ГП ВКС. Зависимости от глубин  $z_0$  и  $z$  у  $V_z(z_0)$  и  $V_z(z)$  (рис. 1, кривые 5 и 6) существенно различаются  $|V_z(z_0)|_{z=\text{const}} \neq |V_z(z)|_{z_0=\text{const}}$ . У вертикального диполя наоборот — зависимости от  $z$  и  $z_0$  амплитуд поля ЗД

и ГП ВКС различаются —  $|P(z_0)|_{z=\text{const}} \neq |P(z)|_{z_0=\text{const}}$  и  $|V_r(z_0)|_{z=\text{const}} \neq |V_r(z)|_{z_0=\text{const}}$ , а зависимости ВП ВКС совпадают —  $|V_z(z_0)|_{z=\text{const}} \neq |V_z(z)|_{z_0=\text{const}}$ . У МИ первой группы амплитуды  $|P(z_0)|$ ,  $|V_r(z_0)|$  и  $|V_z(z_0)|$  при  $z_0 \rightarrow 0$ , и амплитуды  $|P(z)|$ ,  $|V_r(z)|$  при  $z \rightarrow 0$  монотонно уменьшаются и стремятся к нулю. Величина  $|V_z(z)|$  при  $z \rightarrow 0$  принимает достаточно большие значения, зависящие от соотношения  $z$ ,  $z_0$  и  $h$ . Но при  $z = z_0 = h$  ВП ВКС  $V_z = 0$ .

Для МИ второй группы  $|P(z)|$ ,  $|V_r(z)|$  при  $z \rightarrow 0$  уменьшаются и стремятся к нулю, остальные функции  $|P(z_0)|$ ,  $|V_r(z_0)|$  и  $|V_z(z_0)|$  при  $z_0 \rightarrow 0$  или  $|V_z(z)|$  при  $z \rightarrow 0$  принимают различные от нуля значения.

На рис. 3 представлены зависимости от  $z_0$  для первой схемы и от  $z$  — для второй величин, связанных с фазой ЗД. Обозначения и нумерация кривых: 1 — амплитуда поля ЗД  $|P(z_0)|_{z=\text{const}}$ ; 2 — амплитуда поля ЗД  $|P(z)|_{z_0=\text{const}}$ ; эффективная фазовая скорость (ЭФС), вычисленная по приближённой формуле: 7 —  $C_1^*(z_0)|_{z=\text{const}}$  и 8 —  $C_2^*(z)|_{z_0=\text{const}}$  — (ЭФС), вычисленная по ГП ГФ поля ЗД [4]: 9 —  $C_2^*(z_0)|_{z=\text{const}}$  и 10 —  $C_2^*(z)|_{z_0=\text{const}}$ ; ГП ГФ: 11 —  $\varphi'_r = [\partial\varphi(z_0)/\partial r]_{z=\text{const}}$  и 12 —  $\varphi'_r = [\partial\varphi(z)/\partial r]_{z_0=\text{const}}$ ; ВП ГФ: 13 —  $\varphi'_z = [\partial\varphi(z_0)/\partial z]_{z=\text{const}}$  и 14 —  $\varphi'_z = [\partial\varphi(z)/\partial z]_{z_0=\text{const}}$ ; угол между направлением ВКС и горизонтальной плоскостью: 15 —  $\zeta = \arctg[V_z(z_0)/V_r(z_0)]_{z=\text{const}}$  и 16 —  $\zeta = \arctg[V_z(z)/V_r(z)]_{z_0=\text{const}}$ . Видно, что  $\varphi'_r(z)$  и  $\varphi'_r(z_0)$  в зонах интерференционных максимумов ЗД практически совпадают (кривые 11 и 12). В зонах максимумов ЗД величины  $C_1^*$  и  $C_2^*$  достаточно близки и превышают  $c_0$  на 5–12% (кривые 7–10). В зонах максимумов ВП ГФ для всех мультиполей практически совпадают и близки к нулю (кривые 13, 14). Поэтому для формирования ХН вертикальными приемными или излучающими антеннами можно использовать фазовую скорость, равную скорости звука в воде. Этот вывод хорошо согласуется с зависимостями от  $z$  и  $z_0$  углов прихода фронта скалярной волны ЗД: для вертикальных приемной и излучающей антенн величины  $\xi = \arctg[\varphi'_z(z)/\varphi'_r(z)]_{z_0=\text{const}}$  и  $\xi = \arctg[\varphi'_z(z_0)/\varphi'_r(z_0)]_{z=\text{const}}$  стремятся к нулю везде, кроме аномальных зон. Но при обработке сигналов по потоку мощности необходимо учитывать фазовые характеристики и углы прихода ЗД и ВКС, совместно формирующих вектор Умова:  $\zeta = \arctg[V_z(z_0)/V_r(z_0)]_{z=\text{const}}$  и  $\zeta = \arctg[V_z(z)/V_r(z)]_{z_0=\text{const}}$ . Из сравнения 15 и 16

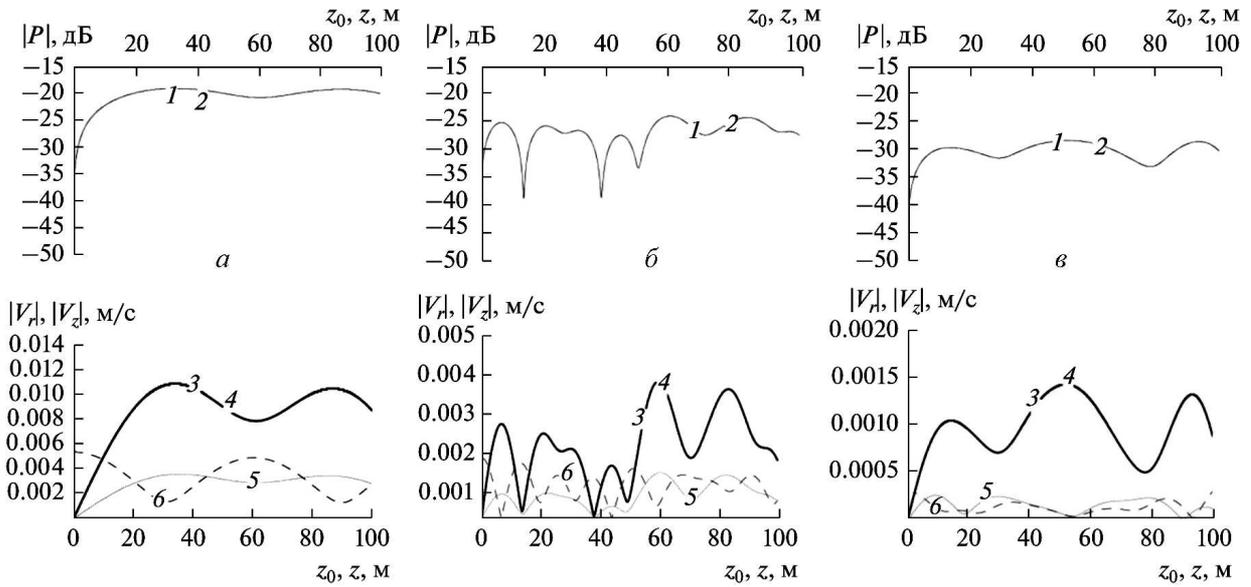


Рис. 1: Зависимости от глубин приема  $z$  и излучения  $z_0$  амплитуд ЗД (кривые 1, 2), ГП (3, 4) и ВП (5, 6) ВКС. ВСП монополя рассчитано при  $a - z = z_0 = 100$  м,  $f = 25$  Гц,  $r = 5$  км;  $б - z = z_0 = 100$  м,  $f = 100$  Гц,  $r = 5$  км;  $в - z = z_0 = 50$  м,  $f = 100$  Гц,  $r = 20$  км

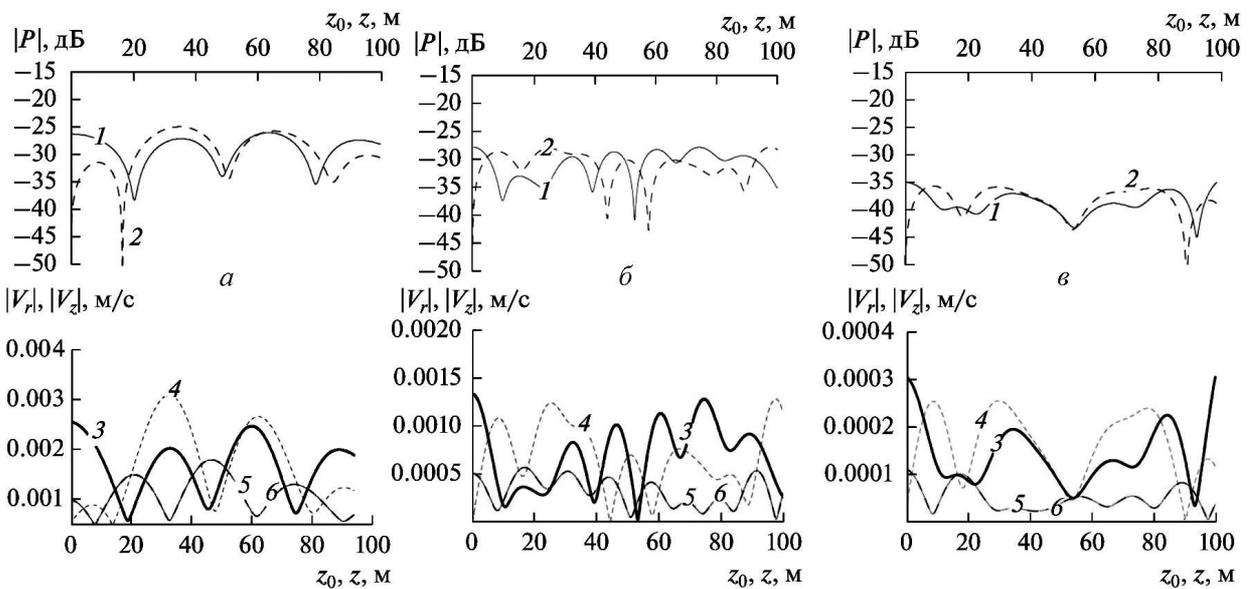


Рис. 2: Зависимости от глубин приема  $z$  и излучения  $z_0$  амплитуд ЗД (кривые 1, 2), ГП (3, 4) и ВП (5, 6) ВКС. ВСП вертикального диполя рассчитано при  $a - z = z_0 = 50$  м,  $f = 50$  Гц,  $r = 5$  км;  $б - z = z_0 = 50$  м,  $f = 100$  Гц,  $r = 5$  км;  $в - z = z_0 = 50$  м,  $f = 100$  Гц,  $r = 20$  км

следует, что в зонах интерференционных максимумов для углов прихода вектора Умова в вертикальной плоскости «невозможность» можно пренебрегать.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Для МИ первой группы ПВ удовлетворяют поля ЗД и ГП ВКС и ГФ, а ВП ВКС и ГФ — не удовлетво-

ряют. Во второй группе МИ — поля ЗД и ГП ВКС и ГФ принципу взаимности не удовлетворяют, а ВП ВКС и ГФ удовлетворяют. Отсюда следует, что низкочастотное поле в волноводе, сформированное реальными объемными источниками, имеющими направленность в вертикальной плоскости, удовлетворяет ПВ не в полной мере.

Поля ЗД из-за ненаправленности приема в меньшей мере чувствительны к влиянию направленных

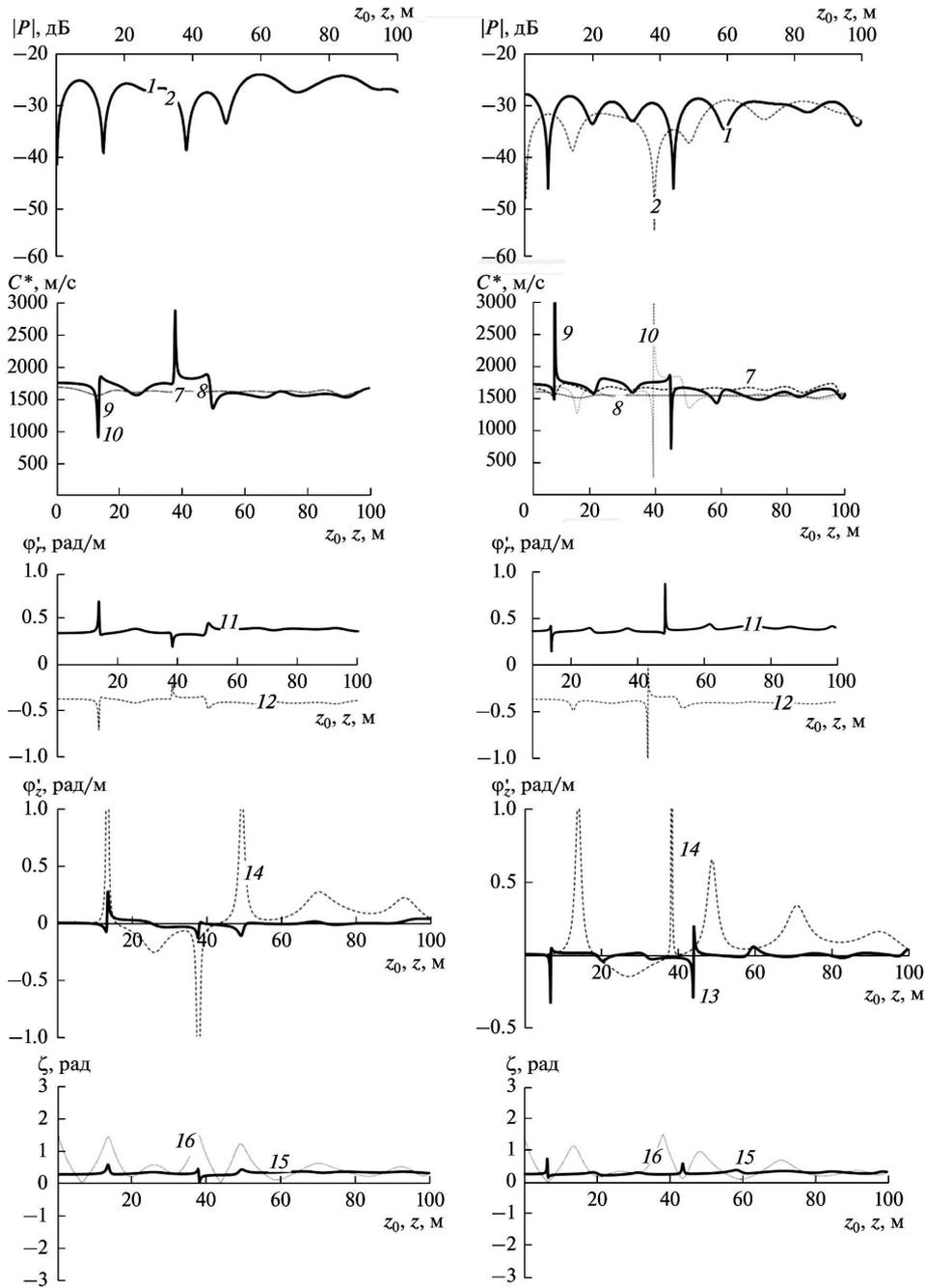


Рис. 3: Зависимости от глубин приема  $z$  и излучения  $z_0$  амплитуд ЗД (кривые 1, 2), ЭФС (7–10), ГП (11, 12) и ВП (13, 14) ГФ, и угла между направлением ВКС и горизонтальной плоскостью (15, 16). Слева — зависимости для монополя, справа — для вертикального диполя;  $f = 100$  Гц,  $r = 5$  км и  $z = z_0 = 100$  м

свойств источников — особенно удаленных мультиполей. Поэтому для скалярных приемников «не взаимностью» можно пренебречь, кроме тех случаев, когда  $z, z_0 < 0.1h$  или  $z, z_0 > 0.9h$ , или приемник располагается в зоне интерференционных минимумов.

ВП ВКС, углы прихода в точку приема фронта волны ЗД или вектора Умова для всех типов мультиполей,

в основном, не взаимны. Углы прихода в точку приема сигналов от всех типов МИ должны быть не взаимны всегда, так как при всех условиях не взаимны либо ВП, либо ГП ВКС. Перечисленные выводы справедливы и для соответствующих проекций вектора Умова, на основе которого выполняется обработка сигналов по потоку мощности.

- 
- [1] Коротин П. И. Акуст. журн. 1997. **43**, № 3. С. 418.  
[2] Годин О. А. Акуст. журн. 1997. **43**, № 6. С. 789.  
[3] Кузнецов Г. Н., Степанов А. Н. Акуст. журн. 2007. **53**, № 3. С. 377.  
[4] Кузнецов Г. Н., Степанов А. Н. Акуст. журн. 2017. **63**, № 3. С. 303.
- 

## An analysis of the applicability of the principle of reciprocity in the vector-scalar fields of multipole sources

G. N. Kuznetsov<sup>1,a</sup>, A. N. Stepanov<sup>2,b</sup>

<sup>1</sup>Wave Research Center at General Physics Institute. Moscow 119991, Russia

<sup>2</sup>Samara University. Samara 443086, Russia

E-mail: <sup>a</sup>skbmortex@mail.ru, <sup>b</sup>stepanovanni@gmail.com

Investigated the applicability of the principles of reciprocity (PR) in hydroacoustic waveguide for vector-scalar fields (VSF) of multipole sources (MS). It is shown that MS with this principle are divided into two groups: in the first group the fields of sound pressures (SP), horizontal projection of vectors vibrational velocity (HP VVV) satisfy PR, and the vertical projection (VP VVV) of this vectors do not satisfy. In the second group SP and HP VVV principle of reciprocity does not satisfy, and their VP VVV satisfy. Gradients of phase (GP) and the arrival angle in the vertical plane substantially not satisfy PR.

PACS: 43.30.+m

*Keywords:* waveguide, principles of reciprocity, multipole sources, vector-scalar fields.

*Received 26 July 2017.*

### Сведения об авторах

- Кузнецов Геннадий Николаевич — канд. физ.-мат. наук, нач. СКБ «Морские технологии», профессор; тел.: (499) 256-17-90, e-mail: skbmortex@mail.ru.
  - Степанов Анатолий Николаевич — докт. физ.-мат. наук, зав. кафедрой; e-mail: stepanovanni@gmail.com.
-