

Нелинейные эффекты в поле вязких волн

А. С. Павловский,* Н. Г. Семенова†

Санкт-Петербургский государственный университет, физический факультет, кафедра радиофизики
Россия, 198504, Санкт-Петербург, ул. Ульяновская, д. 3.
(Статья поступила 09.07.2017; Подписана в печать 13.09.2017)

Выполнено численное исследование нелинейных нестационарных полей скорости и давления вязкой несжимаемой жидкости вблизи колеблющейся твердой пластины бесконечно малой толщины и ограниченной длины в направлении колебаний. Показано, что ограничение размера пластины вдоль направления её колебаний приводит к нелинейности задачи даже при малой амплитуде колебаний поверхности пластины. Исследованы поля давления и скорости при больших амплитудах колебаний поверхности пластины. Объяснено возникновение потоков вытеснения при колебании пластины бесконечно малой толщины и ограниченной длины.

PACS: 43.25.Ed

УДК: 532.5.032, 532.591.

Ключевые слова: вязкая волна, число Маха, искажение формы траектории, нелинейность.

ВВЕДЕНИЕ

Классическое аналитическое рассмотрение поля вязких волн, использующее осциллирующую бесконечную плоскость, проведено в [1]. Однако, практическое применение вязких волн подразумевает использование источника конечного размера. На его поверхности существует колебательная тангенциальная относительная компонента скорости жидкости.

В настоящей работе проведено численное исследование нестационарных нелинейных полей скорости и давления вязкой несжимаемой жидкости при колебаниях в своей плоскости пластины бесконечно малой толщины, конечного размера длины вдоль направления колебаний, бесконечно протяженной по третьей координате. Такая постановка задачи позволила сократить число безразмерных параметров подобия до двух — относительного размера пластины и относительной амплитуды её колебаний. Это позволило сравнивать результаты, полученные в настоящей работе, с результатами исследования колебания цилиндров в вязкой несжимаемой жидкости [2, 3].

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим движение вязкой жидкости вблизи поверхности пластины бесконечно малой толщины, совершающей колебания в плоскости YZ в направлении оси Y и имеющей в этом направлении ограниченный размер L . Начало отсчета совместим с геометрическим центром пластины $X = 0$, $Y = 0$. Будем интересоваться полями скорости и давления вязкой жидкости на расстояниях, на которых вязкую жидкость можно считать несжимаемой [1].

Опишем движение вязкой несжимаемой жидкости системой уравнений, состоящей из уравнения движения, уравнения неразрывности и граничных условий [2]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} &= -\frac{\nabla P}{\rho_0} + \nu \Delta \mathbf{V}, \\ \operatorname{div} \mathbf{V} &= 0, \\ \mathbf{V}|_{\partial S} &= \theta(t) \cdot \mathbf{V}_0 \sin(\omega t), \\ \mathbf{V}|_{\infty} &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь $\mathbf{V}(\mathbf{R})$ — вектор скорости жидкости, \mathbf{R} — радиус-вектор с компонентами X и Y , P — давление, $\nu = \eta/\rho_0$ — кинематическая вязкость, η — динамическая вязкость, $\rho_0 = \text{const}$ — невозмущенная плотность жидкости, $\theta(t \geq 0) = 1$, $\theta(t < 0) = 0$, \mathbf{V}_0 — амплитуда колебательной скорости границы ∂S , которой в настоящей работе является поверхность пластины, колеблющейся в несжимаемой вязкой жидкости с циклической частотой ω .

В работе [2] показано, что задача (1) допускает решение, выражающееся через безразмерные функции скорости \mathbf{v} и давления \tilde{p}

$$\mathbf{V} = \omega \delta \cdot \mathbf{v}(\mathbf{r}, \tau, a, l), \quad (2)$$

$$P = \eta \omega \cdot \tilde{p}(\mathbf{r}, \tau, a, l). \quad (3)$$

Здесь $\delta = \sqrt{2\nu/\omega}$ — величина, имеющая размерность длины, \mathbf{r} — безразмерный радиус-вектор с координатами x и y , $\tau = \omega t$ — безразмерное время, $a = |\mathbf{V}_0|/\omega \delta$ — безразмерная амплитуда смещения поверхности пластины, $l = L/\delta$ — безразмерная длина поверхности пластины в направлении колебаний.

Таким образом, поля скорости и давления зависят от двух параметров — a и l . Причем параметр a является аналогом числа Маха для вязких волн [2], так как скорость их распространения (в плоской задаче) равна $\omega \delta$ [1].

В настоящей работе исследуется влияние параметров a и l на поля скорости и давления жидкости вблизи колеблющейся пластины. Для этого ре-

*E-mail: artyom.pavlovskiy@gmail.com

†E-mail: tatabukamena@rambler.ru

шим задачу (1) методом конечных элементов в пакете Comsol Multiphysics.

Для удобства сравнения зависимостей безразмерно-го давления положим $\tilde{p} = C \cdot p$, где $\max(p) = 1$, C — масштабный множитель. Значение величины множителя C показывает величину максимума безразмерного давления \tilde{p} . Зависимость величины множителя C от величины параметра l , полученная по результатам численного моделирования, показана на рис. 1.

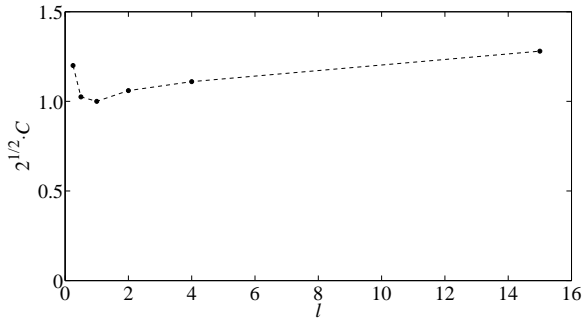


Рис. 1: Зависимость величины множителя C от безразмерного параметра l колеблющейся пластины вдоль направления колебаний. Черные кружки — значения параметра l , для которого рассчитаны значения C . Линия — кусочно-линейная аппроксимация зависимости. Значение параметра $a = 0.5$

Функция включения θ в (1) описывает переходной процесс. Однако, корректно поставить численную задачу без функции θ не представляется возможным. Установившимся режимом колебаний будем считать такой режим, в котором поля скорости и давления в рассматриваемой области пространства в интервале безразмерного времени $2\pi n \leq \tau \leq 2\pi n + 2\pi$ отличаются от таковых в интервале безразмерного времени $2\pi(n-1) \leq \tau \leq 2\pi(n-1) + 2\pi$ менее, чем на 0.1%. Здесь и далее $n = 1, 2, \dots$. Численное моделирование показало, что на расстоянии от поверхности пластины $x \leq 1$ поля скорости и давления устанавливаются при $n \geq 4$.

2. ПОЛЯ ДАВЛЕНИЯ И СКОРОСТИ ЖИДКОСТИ В УСТАНОВИВШЕМСЯ РЕЖИМЕ КОЛЕБАНИЙ

В численных экспериментах замечено появление градиентов давления вблизи поверхности колеблющейся пластины ограниченного размера l вдоль направления колебаний и бесконечно малого размера поперек направления колебаний. Нормальная к поверхности пластины компонента скорости жидкости отсутствует. Появление градиентов давления приводит к возникновению потоков вытеснения и области вытеснения.

Введем аналог толщины вытеснения [4] нестационарную безразмерную величину толщины вытеснения

$$\tilde{\delta}(t) = \int \mathbf{v}(\mathbf{r}, \tau, l, a) d\mathbf{r}. \quad (4)$$

Интегрирование в (4) ведется внутри пограничного слоя на расстояниях $|\mathbf{r}| < 1$.

Поля скорости жидкости, полученные численным моделированием нестационарной нелинейной задачи (1) при $l \gg 1$ и $a < 1$, отличаются от их значений линейного приближения на единицы процентов. Известное решение линейной задачи [1] в безразмерном виде имеет вид

$$\mathbf{v} = a \exp(-x) \cos(\tau - x) \mathbf{e}_y. \quad (5)$$

В приближении (5) интеграл (4) берется

$$\begin{aligned} \tilde{\delta}(t) &= a \int_0^1 \exp(-x) \cos(\tau - x) dx = \\ &= \frac{a}{2} (\sin \tau + \cos \tau - \exp(-1) (\sin(\tau - 1) + \cos(\tau - 1))) \end{aligned}$$

На рис. 2 изображены временные зависимости безразмерной функции давления p , полученные по результатам численного решения нелинейной задачи (1) при $a = 0.5$, и удвоенной толщины вытеснения $\tilde{\delta}$ в линейном приближении (5). Максимальные значения абсолютной величины давления наблюдаются в моменты времени, близкие к значениям $\tau \approx \pi/2 - \pi/8 + \pi n$. Экстремальные значения величины давления находятся на краях рассматриваемой пластины в точке с безразмерными координатами $x = 0, y = \pm l/2$. Аналогичная закономерность имела на полюсах колеблющегося цилиндра в работе [3].

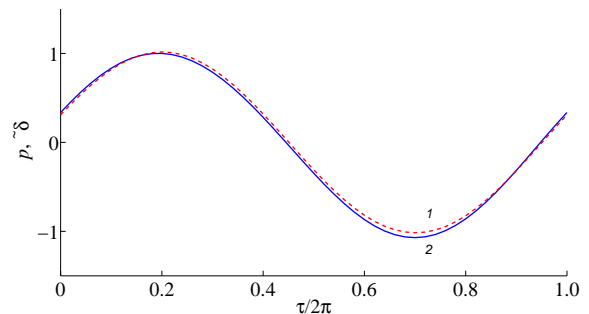


Рис. 2: Сравнение временных зависимостей: 1 — удвоенной толщины вытеснения $\tilde{\delta}$ (4), 2 — величины безразмерного давления на крае поверхности пластины при значении $C = \sqrt{2}$. Зависимость $\tilde{\delta}(\tau)$ смещена по оси абсцисс вправо на величину $3\pi/376$ относительно её фактического значения

Максимальное значение абсолютной величины давления составляет $\sqrt{2}\eta\omega$.

В моменты времени $\tau \approx \pi/2 - \pi/7.52 + \pi n$ реализуется максимальная толщина вытеснения $\tilde{\delta}$. Максимум толщины вытеснения возникает раньше максимума величины давления. Различие по времени возникновения максимумов обсуждаемых величин составляет $\Delta\tau \approx 3\pi/376$. При значениях параметров $l = 1, a = 0.5$ на краях поверхности пластины давление выражается

по эмпирической формуле

$$P \approx \sqrt{2}\eta\omega \cdot 2\tilde{\delta}(\tau - 3\pi/376).$$

Величина ошибки этой аппроксимации не превышает 9%. Достаточно большая величина ошибки свидетельствует о том, что при указанных значениях параметров l , a нелинейность задачи уже проявляется. Различие между высотой пиков в интервалах времени $2\pi n \leq \tau \leq \pi + 2\pi n$ и $\pi + 2\pi n \leq \tau \leq 2\pi + 2\pi n$ составляет 7%.

Эффективный поперечный размер такой пластины равен удвоенной толщине вытеснения $2\tilde{\delta}$. Множитель 2 соответствует наличию у пластины двух граней, соприкасающихся с вязкой жидкостью. Наличие у пластины эффективной толщины $2\tilde{\delta}$ приводит к возникновению потоков вытеснения.

3. ВЛИЯНИЕ ЧИСЛА МАХА НА ПОЛЯ ДАВЛЕНИЯ И СКОРОСТИ ЖИДКОСТИ В УСТАНОВИВШЕМСЯ РЕЖИМЕ КОЛЕБАНИЙ

На рис. 4 изображены зависимости безразмерного давления p от времени τ на краю пластины в точке с безразмерными координатами $x = 0, y = l/2$. Полученные зависимости (кривые 2 и 3) иллюстрируют генерацию высших гармоник за счет нелинейности при увеличении параметра $a > 1$. Модуль величины минимума давления в разы больше, чем модуль величины его максимума. С ростом величины параметра $a > 1$ модули максимума и минимума давления увеличиваются. В настоящей работе это выражено ростом величины множителя C . Пики зависимостей сдвигаются по временной шкале левее в интервале времени $2\pi n \leq \tau \leq \pi + 2\pi n$ и правее в интервале времени $\pi + 2\pi n \leq \tau \leq 2\pi + 2\pi n$. Приближение (5) не даёт правильного результата. Для корректного вычисления величины $\tilde{\delta}$ требуется подставить результаты численного решения системы (1) в интеграл (4).

На рис. 5 приведено различие минимальных значений величин безразмерного давления p , полученных при разных значениях параметра a в окрестности указанного края поверхности пластины с ростом значения безразмерной координаты x . При значении $x = 1$ минимумы величины давления равны. На расстояниях $x < 1$ различие убывает. С ростом расстояния от колеблющейся поверхности при значении $x > 1$ различие возрастает.

В работе [2] было замечено искривление траекторий перемещения точек нулевого и экстремального значений функции скорости жидкости при распространении вязкой волны, генерируемой цилиндрами конечных радиусов. Эти траектории не совпадали одна с другой и зависели от параметров задачи. В настоящем исследовании также замечено искривление этих траекторий. На рис. 6. приведены полученные по результатам численного моделирования траектории перемещения точек

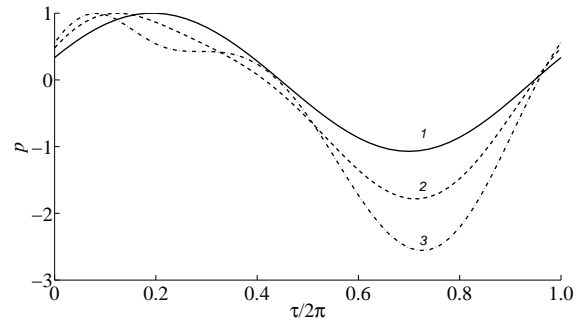


Рис. 3: Значения величин нормированного безразмерного давления p , полученных за интервал времени от $3T + T/2$ до $4T$ при разных значениях безразмерного параметра a на крае пластины. Параметр $l = 1$. Безразмерные координаты $x = 0, y = l/2$. 1 – $a = 0.5, C = \sqrt{2}$. 2 – $a = 5, C = 7.5\sqrt{2}$. 3 – $a = 10, C = 12\sqrt{2}$

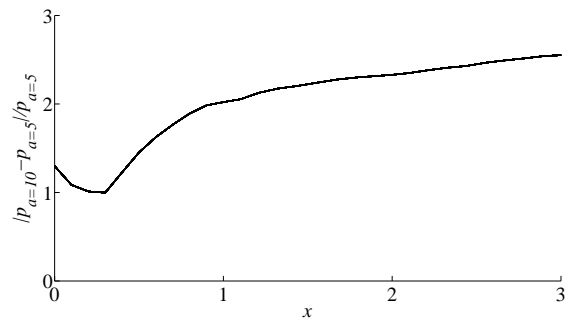


Рис. 4: Различия абсолютных величин безразмерного давления p при значениях безразмерного параметра $a = 5$ и 10 с ростом расстояния x от колеблющейся поверхности. Значение координаты $y = l/2$. Значение параметра $l = 1$

нулевого и экстремального значений функции скорости жидкости в нелинейной вязкой волне. Вдоль траекторий 9 – 16 рис. 6 перемещаются центры мгновенных вихрей. Чем больше параметр a , тем больше кривизна траекторий, тем дальше вихри отходят от центра пластины. Кривизна траекторий свидетельствует [2] о невозможности применения «идеализации поперечной вязкой волны» при её распространении от колеблющейся пластины бесконечно малой толщины и ограниченной в направлении колебаний.

Полученные по результатам численного моделирования безразмерные скорости перемещения точек нулевого и экстремального значений функции скорости жидкости близки к единице.

4. РОЛЬ КОНВЕКТИВНОГО УСКОРЕНИЯ В ПРОЯВЛЕНИИ НЕЛИНЕЙНЫХ ЭФФЕКТОВ

Выясним, какая сила приводит к возникновению наблюдаемых мгновенных вихревых движений в вязкой жидкости. Роль первого и четвертого слагаемого урав-

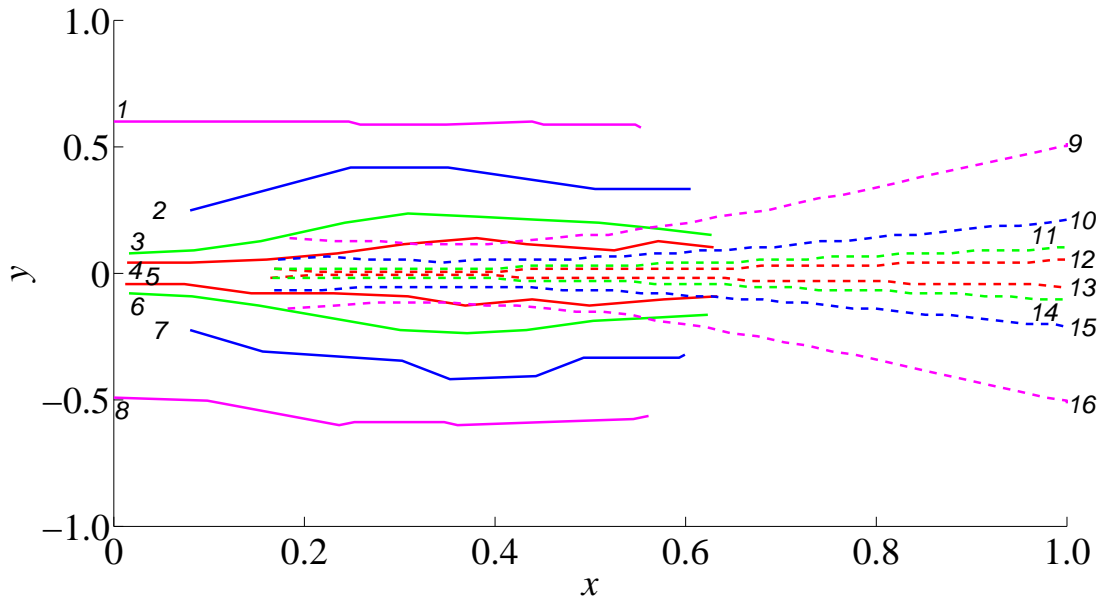


Рис. 5: Траектории перемещения точек нулевого и экстремального значений функции скорости жидкости в нелинейной вязкой волне. Параметр $l = 1$. Кривые 1–8 соответствуют траекториям перемещения точки экстремума скорости жидкости в вязкой волне. Кривые 9–16 соответствуют траекториям перемещения точки нуля скорости жидкости в вязкой волне. Кривые 1–4 и 9–12 соответствуют интервалу времени τ от $2\pi n$ до $\pi + 2\pi n$. Кривые 5–8 и 13–16 соответствуют интервалу времени τ от $\pi + 2\pi n$ до $2\pi + 2\pi n$. 1, 8, 9, 16 — параметр $a = 5$; 2, 7, 10, 15 — $a = 2$; 3, 6, 11, 14 — $a = 1$; 4, 5, 12, 13 — $a = 0.5$

нения движения (1) ясна из линейной задачи [1]. Происходит генерация вязких волн. Влиянию градиента давления посвящены два раздела настоящей работы. Градиент давления генерирует потоки вытеснения. Потоки вытеснения замыкают линии тока жидкости вдали от поверхности пластины. Однако, остаётся не ясным, почему вблизи поверхности пластины существует мгновенный вихрь, центром которого практически во всём интервале времени является точка, а не линия.

На рис. 6 показаны направление и безразмерная величина конвективного ускорения $(\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} / (\omega^2 \delta)$ при значениях числа Маха 0.5 и 5. Темными стрелками показано направление вектора скорости жидкости, светлыми стрелками — направление вектора конвективного ускорения. Сплошные линии — это изолинии величины конвективного ускорения. Величина конвективного ускорения максимальна в окрестности краев пластины. На переднем крае по ходу движения пластины величина конвективного ускорения меньше, чем на заднем по ходу движения крае. На краях пластины конвективное ускорение направлено к ее центру. Вблизи поверхности пластины векторы конвективного ускорения и скорости жидкости практически параллельны.

В окрестности центра мгновенного вихря вектор конвективного ускорения практически перпендикулярен вектору скорости жидкости. Вектор конвективного ускорения направлен к его центру. Конвективное ускорение играет роль центростремительного ускорения жидкости. Отметим наличие переходной области — области, в которой вектор конвективного ускорения не

параллелен и не перпендикулярен вектору скорости жидкости. Для этого снова обратимся к рис. 6. Линии 9–16 на рис. 6 начинаются с координаты $x = 0.2$, потому что на меньших расстояниях центр вихря не выражен точкой. Указанное расстояние является размером обсуждаемой окрестности поверхности пластины, в которой конвективное ускорение не играет роли центростремительного ускорения. «Центром» мгновенного вихря в этой окрестности является линия. Эта линия практически прямая параллельная поверхности пластины. На этой линии скорость жидкости практически обращается в нуль. Эта линия перемещается в пространстве со скоростью распространения вязкой волны. Длина её по мере перемещения сокращается и обращается в ноль на расстоянии $x = 0.2$.

Оценим величины слагаемых в уравнении движения (1) по результатам численного счета. Максимум абсолютной величины конвективного ускорения составил $\max(|(\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V}| / (\omega^2 \delta)) \approx 1.8$ при значениях параметров $a = 0.5$, $l = 1$. Сравним его с максимальной величиной градиента давления $\max(\delta |\nabla P| / \eta \omega) \approx 295$ при тех же значениях параметров a , l . Различие составляет два порядка. При значениях параметра $a > 1$ величины максимумов градиента давления и конвективного ускорения отличаются в меньшей степени. Например, при значении параметра $a = 5$ получены следующие значения: $\max(|(\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V}| / (\omega^2 \delta)) \approx 87$, $\max(\delta |\nabla P| / \eta \omega) \approx 200$. При значениях параметра $a < 1$ поля вязких волн в большей степени искажаются потоками вытеснения.

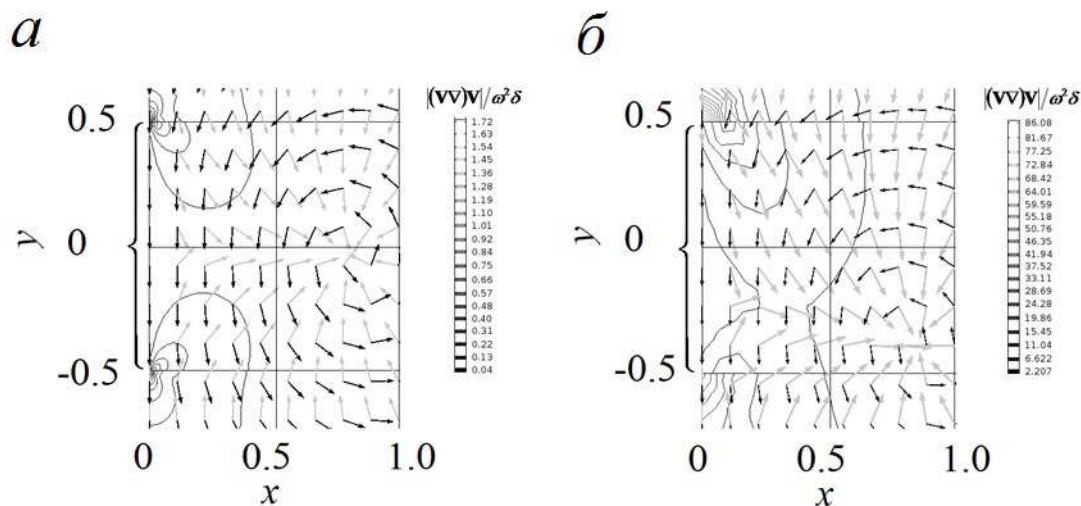


Рис. 6: Конвективное ускорение. Светлые стрелки — направление мгновенного вектора конвективного ускорения. Изолинии — его безразмерная абсолютная величина. Чёрные стрелки — направление вектора скорости жидкости. Колеблющаяся пластина помечена фигурной скобкой. Значение параметра $l = 1$. Момент времени $\tau = 3\pi/2$. a — значение параметра $a = 0.5$, b — $a = 5.0$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Вязкие волны, генерируемые источниками ограниченных размеров вдоль направления колебаний, являются нелинейными.

Результаты настоящей работы свидетельствуют о появлении в вязкой жидкости меняющейся со временем толщины вытеснения у колеблющейся в своей плоскости пластины бесконечно малого размера поперек направления колебаний. При колебаниях в вязкой жидкости пластины бесконечно малой толщины и конечного размера вдоль направления колебаний её толщина эффективно увеличивается. Образуются область вытеснения и поток вытеснения.

Нелинейные искажения совокупного поля вязких

волн и потоков вытеснения проявляются тем сильнее, чем больше величина относительной амплитуды колебаний пластины — параметр a , и чем меньше её относительная безразмерная длина вдоль направления колебаний — параметр l . Параметр a является аналогом числа Маха в смысле отношения амплитуды скорости поверхности пластины к скорости распространения вязковолнового процесса.

Траектории перемещения точек экстремального и нулевого значений скорости жидкости в поле нелинейной вязкой волны с ростом числа Маха искривляются. Траектория перемещения точки нулевого значения скорости жидкости является центром мгновенного вихря.

[1] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Гидродинамика. 6. М., 1986.

[2] Павлов В. А., Павловский А. С., Семенова Н. Г. ЖТФ. 2016. 86, №. 7. С. 31.

[3] Павловский А. С., Семенова Н. Г. Письма в ЖТФ. 2014.

40, №. 8. С. 14.

[4] Лойцянский Л. Г. // Ламинарный пограничный слой. М., 1962.

Nonlinear effects occurring in viscous wave field

A. S. Pavlovskii^a, N. G. Semenova^b

Department of Radiophysics, Faculty of Physics, Saint-Petersburg State University, Saint-Petersburg, 198504, Russia
E-mail: ^aartyom.pavlovskiy@gmail.com, ^btatabukamena@rambler.ru

A numerical research on nonlinear time-dependent fields of velocity and pressure in viscous incompressible fluid near an oscillating solid infinitely of the length limited in the direction of oscillation thin plate was performed. The limitation of the plate size along the direction of its oscillation leads to nonlinearity of the problem even when oscillation amplitude of the plate surface is small. The fields of velocity and pressure with big oscillation amplitudes of the plate surface were studied. The explanation of the displacement flows appearance while oscillation of an infinitely thin plate of limited length was given.

PACS: 43.25.Ed

Keywords: viscous waves, Mach number, distortion of the trajectory, nonlinearity.

Received 09 July 2017.

Сведения об авторах

1. Павловский Артем Сергеевич — аспирант; e-mail: artiom.pavlovskiy@gmail.com.
 2. Семенова Наталия Глебовна — канд. физ.-мат. наук, доцент; e-mail: tatabukamena@rambler.ru.
-