

Теоретический анализ зависимости радиационной силы, оказываемой акустическим пучком на твердотельный сферический рассеиватель, от соотношения ширины пучка и диаметра рассеивателя

А. В. Николаева^{1,*}, О. А. Сапожников^{1,2,†}, М. Р. Бэйли²

¹Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет, кафедра акустики
Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2

²Центр промышленного и медицинского ультразвука университета шт. Вашингтон, Сизтл, США
(Статья поступила 04.07.2017; Подписана в печать 12.09.2017)

В работе теоретически решается задача повышения эффективности метода дистанционного перемещения небольших объектов под действием радиационной силы путем выбора оптимальных параметров ультразвукового пучка. Рассматривается расположенный в жидкости твердотельный сферический рассеиватель, на который падает сфокусированный ультразвуковой пучок. Одним из практически важных является вопрос о том, как радиационная сила зависит от соотношения между поперечной шириной пучка и диаметром рассеивателя. Как показали расчеты для пучка с квазигансовским поперечным распределением, зависимость имеет четко выраженный максимум при близости поперечных размеров пучка и рассеивателя. Аналогичный результат был получен и при использовании более приближенного к практике поршневого фокусирующего излучателя. Была высказана гипотеза, что физической причиной указанного эффекта является резонансное возбуждение сдвиговых волн акустической волной, распространяющейся вдоль поверхности камня в воде. Для проверки были проведены вычисления силы для двух материалов рассеивателя: моногидрата оксалата кальция (материал одного из типов почечных камней) и гипсового цемента марки U-30. При расчётах скорость продольной волны фиксировалась, а скорость поперечной волны изменялась в широком диапазоне. Оказалось, что наибольшая радиационная сила действительно достигалась при близости скорости поперечных волн в камне к скорости звука в жидкости.

PACS: 43.25.+y УДК: 534.222.2

Ключевые слова: радиационная сила, рассеяние волн, акустический пучок, квазигансовский пучок, сдвиговые волны, упругий рассеиватель.

ВВЕДЕНИЕ

В акустике эффект радиационного давления (радиационной силы) возникает, когда на пути распространения звукового пучка или импульса возникает рассеивающее или поглощающее препятствие. В результате часть энергии и импульса акустического пучка передается объекту, что может привести к отталкиванию, притягиванию, вращению или захвату объектов. Дистанционное силовое воздействие с помощью ультразвука представляет интерес для медицинских приложений. Так, несколько лет назад было предложено использовать радиационную силу, создаваемую сфокусированным ультразвуком, для дистанционного перемещения камней в почках человека [1]. Эксперименты показали, что возникающая радиационная сила зависит от параметров ультразвукового пучка и от характеристик почечных камней. Величина силы при использовании безопасной для человека интенсивности акустического пучка сравнительно мала, а ее увеличение за счет роста интенсивности ультразвука ограничено медицинскими нормами безопасности. Проведение безопасной и эффективной процедуры воздействия на камень акустическим пучком требует разра-

ботки теоретической и численной модели для точного расчета радиационной силы в зависимости от размера и упругих свойств рассеивателя, а также от диаметра, интенсивности и частоты акустического пучка. В настоящей работе на примере упругого сферического рассеивателя анализируется зависимость величины радиационной силы от соотношения между размером рассеивателя и шириной «толкающего» пучка.

1. ЗАДАЧИ И МЕТОДЫ

Характерные особенности возникновения радиационной силы

Радиационная сила возникает в результате частичной передачи количества движения волны препятствию вследствие ее рассеяния или поглощения. Аналитический расчет радиационной силы требует, во-первых, решения задачи рассеяния и, во-вторых, применения полученного решения к расчету силы. В настоящей работе рассматривается случай, когда однородный сферический рассеиватель расположен в фокусе акустического пучка. Характер рассеяния и, как следствие, величина радиационной силы зависят как от пространственной структуры падающей волны, так и от её частоты. Частотную зависимость проще всего анализировать в случае плоской волны [2]. На рис. 1 показаны результаты проведённых расчётов для упру-

*E-mail: av.nikolaeva@physics.msu.ru

†E-mail: oleg@acs366.physics.msu.ru

гого рассеивателя в воде ($c = 1490$ м/с). Построены зависимости радиационной силы от радиуса рассеивателя и частоты падающего пучка для трех различных значений скорости поперечных волн в материале рассеивателя: 1400, 1600 и 2132 м/с. Видно, что частотная зависимость силы носит немонотонный характер, причём в случаях, когда скорости звука в жидкости (1490 м/с) близка к скорости сдвиговых волн в рассеивателе (1400 и 1600 м/с), появляются ярко выраженные резонансные пики.

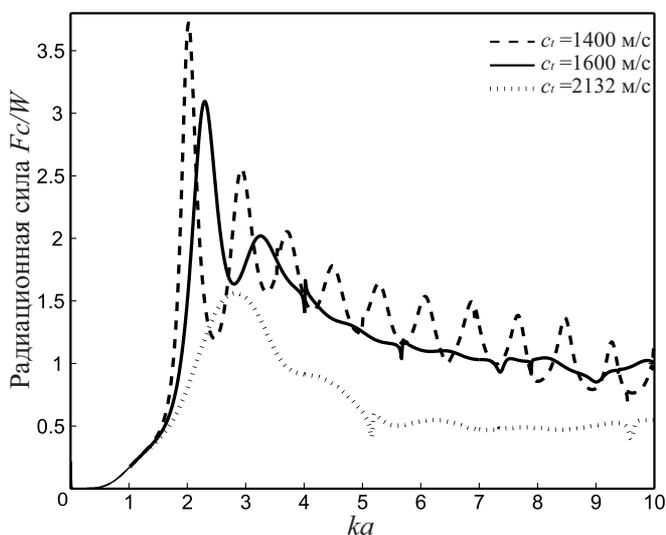


Рис. 1: Зависимость нормированной радиационной силы, создаваемой плоской волной в воде, от волнового размера сферического рассеивателя ka (k — волновое число, a — радиус рассеивателя) при скорости распространения поперечных волн в рассеивателе $c_t = 1400$ м/с; 1600 м/с и 2132 м/с. Скорость продольных волн в рассеивателе $c_l = 2132$ м/с, скорость звука в воде $c = 1490$ м/с, соответствующие плотности равны 2040 и 1000 кг/м³. Сила F нормирована на величину W/c , где $W = \pi a^2 I$ — акустическая мощность, проходящая через сечение рассеивателя в его отсутствие, I — интенсивность волны

Указанная особенность рассеяния может быть вызвана тем, что при близости скоростей происходит более эффективное проникновение энергии падающей волны в рассеиватель, что приводит к резонансному возбуждению упругих колебаний рассеивателя на определенных частотах. Похожий эффект наблюдался в работе [3], где исследовалось распространение волн в упругих рассеивателях в применении к задаче разрушения почечных камней. Выяснилось, что наиболее эффективное разрушение почечных камней наблюдается при близости скорости поперечных волн в рассеивателе к скорости звука в окружающей жидкости. Таким образом, разумно предположить, что на величину возникающей радиационной силы влияют не столько сами значения скоростей упругих волн в рассеивателе, сколько то, как они соотносятся со значением скорости звука в окружающей жидкости. Действительно, возбуждение волн источниками наиболее эффективно при

близости скорости источника к скорости волны (явление волнового резонанса). В рассматриваемом случае рассеяния волны на упругом рассеивателе источником служит падающая волна, распространяющаяся в жидкости вдоль поверхности рассеивателя, а возбуждаемыми волнами являются продольные и поперечные волны в рассеивателе. Отметим, что скорость продольных волн в твердых телах обычно в несколько раз превышает скорость звука в жидкостях, т. е. условие волнового резонанса для продольных волн, как правило, не выполняется. С другой стороны, поперечные волны примерно вдвое медленнее продольных. Для некоторых материалов скорость сдвиговых волн близка к скорости звука в воде. Именно так происходит в случае почечных камней.

Квазиггауссовский фокусированный пучок

Необходимо отметить, что эффективное возбуждение сдвиговых волн на поверхности рассеивателя происходит там, где след падающей волны относительно долго движется вдоль поверхности примерно с одинаковой скоростью, близкой к скорости поперечных волн. Такое условие создаётся на боковой поверхности в результате огибания рассеивателя падающей волной. В случае плоской падающей волны в жидкости вблизи боковой поверхности рассеивателя акустические возмущения имеются всегда. Если же на камень падает фокусированный пучок, диаметр которого меньше диаметра камня, то боковая поверхность оказывается «неозвученной» и поэтому можно ожидать, что радиационная сила окажется меньше, чем в случае более широкого пучка. Это предположение может быть проверено прямым расчётом.

Пусть упругий сферический рассеиватель расположен в поле осесимметричного гармонического звукового пучка, распространяющегося в идеальной жидкости. При таких условиях радиационная сила, действующая на препятствие на оси пучка, имеет только осевую компоненту F_z [4]:

$$F_z = -\frac{2\pi |p_0|^2}{\rho c^2 k^2} \times \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \operatorname{Re} \{ g_n g_{n+1}^* (c_n + c_{n+1}^* + 2c_n c_{n+1}^*) \}. \quad (1)$$

Здесь ρ, c — плотность и скорость звука в окружающей жидкости, соответственно, p_0 — амплитуда падающей волны в центре рассеивателя (в его отсутствие), $k = 2\pi f/c$ — волновое число, f — частота волны, g_n — коэффициенты, характеризующие пространственную структуру падающей волны. В случае плоской падающей волны все $g_n = 1$. Далее, c_n — коэффициенты, характеризующие рассеивающие свойства препятствия, звёздочка указывает на комплексное сопряжение. Явный вид коэффициентов c_n приведён в рабо-

тах [2, 4]; их величины зависят от частоты и свойств материала рассеивателя и окружающей жидкости.

Полученное общее выражение (1) применимо к акустическим пучкам, удовлетворяющим условиям гармоничности и осесимметричности, для которых задача рассеяния решается в явном виде. Квазигауссовский пучок удовлетворяет этим условиям и является хорошей моделью для исследования влияния ширины пучка на величину радиационной силы. Будем считать, что на препятствие падает квазигауссовский пучок так, что рассеиватель расположен в центре перетяжки.

В работе [5] описано решение для квазигауссовского пучка и его свойства. Ниже приведены лишь те соотношения, которые необходимы для расчета величины радиационной силы. Если на препятствие падает пучок, заданный в виде, представленном в работе [5], то неизвестные коэффициенты g_n , необходимые для расчета силы, имеют следующий вид:

$$g_n(x) = \frac{1 - (-1)^n e^{-2x}}{(1 - e^{-2x})^2} \cdot e^{-x\sqrt{2\pi x}} I_{n+1/2}(x), \quad (2)$$

где $I_{n+1/2}(x)$ — функции Инфельда, $x = kz_d$, $z_d = ka_0^2/2$ — длина дифракционной расходимости пучка, a_0 — радиус фокальной перетяжки квазигауссовского пучка.

Фокусированный пучок общего вида

В практически важных случаях используются пучки с более сложной структурой. Таким, к примеру, является фокусированный пучок, генерируемый излучателем в виде сферической чаши с равномерным распределением нормальной компоненты колебательной скорости. Такой источник иногда называют поршневым излучателем. Коэффициенты g_n в этом случае не имеют простого выражения, и поэтому для расчета радиационной силы необходимо использовать более общий метод, описанный в работе [3], который применим к акустическим пучкам произвольного вида. В рамках этого метода падающее поле представляется в виде суммы плоских волн, для каждой из таких волн решается задача рассеяния, полученное полное поле представляется в виде разложения по сферическим гармоникам, которое в конечном итоге используется для расчёта радиационной силы. Здесь же мы приведем конечный результат для аксиальной компоненты силы:

$$F_z = -\frac{1}{4\pi^2 \rho c^2 k^2} Re \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \Psi_n \sum_{m=-n}^n B_{nm} H_{nm} H_{n+1,m}^* \right\}, \quad (3)$$

где коэффициенты B_{nm} зависят от индексов суммирования n и m :

$$B_{nm} = \sqrt{(n+m+1)(n-m+1)/[(2n+1)(2n+3)]},$$

коэффициенты H_{nm} характеризуют структуру падающего пучка, а величины Ψ_n определяются параметра-

ми рассеивателя:

$$H_{nm} = \int \int_{k_x^2 + k_y^2 \leq k^2} dk_x dk_y S(k_x, k_y) Y_{nm}^*(\theta_k, \varphi_k), \quad (4)$$

$$\Psi_n = (1 + 2c_n)(1 + 2c_{n+1}^*) - 1.$$

В этом выражении $S(k_x, k_y)$ — пространственный (угловой) спектр рассматриваемого пучка, Y_{nm} — сферические функции, а углы θ_k и φ_k задают направление волнового вектора $\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z = \sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2})$.

2. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Зависимость силы от ширины пучка

На основе выражений (1) и (2) проведены расчеты для квазигауссовского пучка, а на основе (3) и (4) — для пучка, создаваемого поршневым излучателем. Исследовалось влияние соотношения между поперечным радиусом пучка в месте расположения рассеивателя и радиусом рассеивателя на величину радиационной силы, действующей на сферу радиуса $a = 2$ мм в поле акустического пучка. Вычисления были проведены для двух материалов рассеивателя: моногидрата оксалата кальция (материал одного из типов почечных камней) и гипсового цемента марки У-30. Эти материалы используются в клинических испытаниях [6].

На рис. 2 представлены изменения величины радиационной силы, действующей со стороны квазигауссовского пучка (а) и со стороны пучка от поршневого излучателя (б), с увеличением параметра ka_0 . Сила нормирована на мощность излучения W , которая остается неизменной для всех вычислений. Для обоих материалов в области, когда радиус перетяжки значительно превышает радиус пучка ($a \gg a_0$), часть энергии проходит мимо и пучок все больше напоминает плоскую волну; соответствующая сила уменьшается, что подтверждается полученными зависимостями. Максимальное же значение радиационной силы достигается при радиусе перетяжки сравнимом с радиусом пучка ($a \approx a_0$), когда пучок «обтекает» рассеиватель. Таким образом, несмотря на то, что, казалось бы, некоторая часть энергии проходит мимо рассеивателя, оказываемая на него сила возрастает по сравнению со случаем $a \ll a_0$. При различных соотношениях между a_0 и a разница в силе по сравнению со случаем очень узкого пучка может достигать 40%.

Влияние сдвиговых волн

Предполагается, что физической причиной указанного выше эффекта является резонансное возбуждение сдвиговых волн акустической волной, распространяющейся вдоль поверхности камня в воде. Для проверки были проведены вычисления силы для тех же

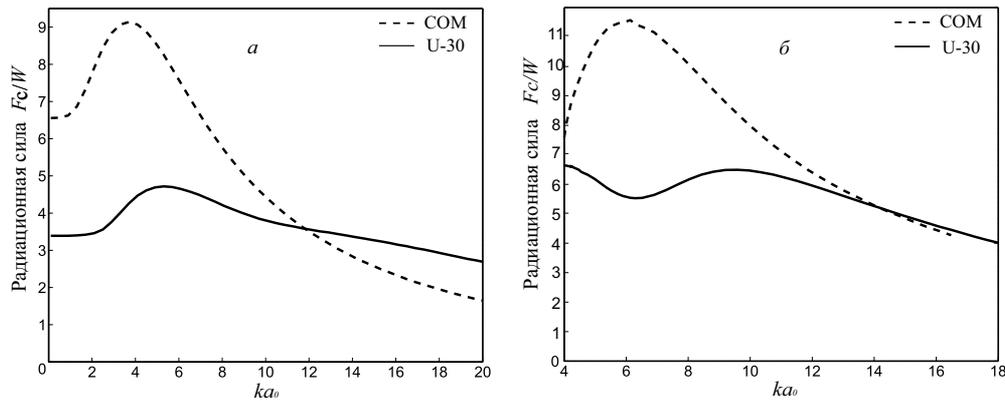


Рис. 2: Нормированная радиационная сила в зависимости от радиуса пучка a_0 для рассеивателей COM и U-30. *a* — случай фокусированного квазигaussianского пучка при безразмерном радиусе рассеивателя $ka = 3$, *б* — случай фокусированного пучка от поршневого источника при $ka = 9$. В обоих случаях радиус рассеивателя $a = 2$ мм

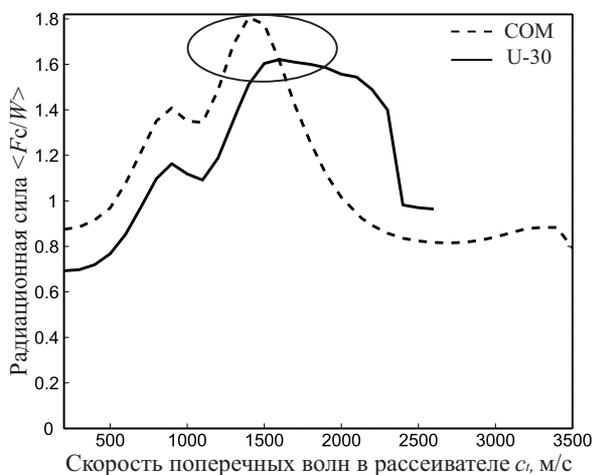


Рис. 3: Усредненная по интервалу ka радиационная сила для рассеивателей COM и U-30. Зависимость от скорости поперечных волн в рассеивателе 100–3500 м/с (COM, $c_t = 4535$ м/с) и 100–2600 м/с (U-30, $c_t = 2630$ м/с)

рассеивателей (COM и U-30). При расчетах скорость продольной волны выбиралась равной соответствующей скорости для конкретного материала, а скорость

поперечной волны изменялась в широком диапазоне (рис. 3). Оказалось, что и для COM, и для U-30 рассеивателей, несмотря на различные значения скорости продольных волн, максимальная величина радиационной силы достигается при близости скорости поперечных волн к скорости звука в жидкости (1500 м/с).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведённый анализ показал, что величина радиационной силы при воздействии на упругий рассеиватель зависит от ширины пучка, и обусловлено это, в первую очередь, возбуждением сдвиговых волн на поверхности рассеивателя. Близость скорости генерируемых сдвиговых волн к скорости звука в окружающей жидкости приводит к росту силы, действующей на рассеиватель. Таким образом, роста силы можно добиться не увеличением мощности излучателя, что может привести к травмирующим последствиям, а за счет регулировки ширины пучка. В случае источников с электронной регулировкой фокуса изменение ширины пучка не должно составить большого труда.

Работа поддержана грантом РФФИ № 17-02-00261 и грантом Президента РФ по программе поддержки ведущих научных школ № НШ-7062.2016.2.

[1] May P. C., Bailey M. R., Harper J. D. *Curr Opin Urol.* 2016. **26**, N 3. P. 264.
[2] Hasegawa T., Yosioka K. *J. Acoust. Soc. Am.* 1969. **46**. P. 1139.
[3] Sapozhnikov O. A., Maxwell A. D., MacConaghy B., Bailey M. R. *J. Acoust. Soc. Am.* 2007. **112**, N 2. P. 1190.

[4] Sapozhnikov O. A., Bailey M. R. *J. Acous. Soc. Am.* 2013. **133**, N 2. P. 661.
[5] Сапожников О. А. *Акуст. журн.* 2012. **58**. № 1. С. 49.
[6] Harper J. D., Cunitz B. W., Dunmire B., Lee F., Sorensen M. D., Hsi R. *J. Urol.* 2016. **195**, N 4. P. 956.

Theoretical analysis of the dependence of the radiation force exerted by an acoustic beam on a solid spherical scatterer, on the ratio between the beam width and the diameter of the scatterer

A. V. Nikolaeva^{1,a}, O. A. Sapozhnikov^{1,2,b}, M. R. Bailey²

¹*Department of Acoustics, Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University, Moscow 119991, Russia*

²*Center for Industrial and Medical Ultrasound, Applied Physics Laboratory, University of Washington, Seattle, WA, 98105 USA*

E-mail: ^aav.nikolaeva@physics.msu.ru, ^boleg@acs366.phys.msu.ru

In this work, the problem of increasing the efficiency of the method of remote displacement of small objects under the action of radiation force is theoretically solved by choosing optimal parameters of an ultrasonic beam. We consider a solid spherical scatterer located in the liquid, irradiated by a focused ultrasonic beam. One of the most important is the question of how the radiation force depends on the ratio between the beamwidth and the diameter of the scatterer. Calculations for a beam with a quasi-Gaussian transverse distribution have shown that the dependence has a clearly pronounced maximum when the transverse dimension of the beam and that of the scatterer are close. A similar result was obtained when using a focusing piston source that is more realistic to the practice. It was hypothesized that the physical cause of this effect is the resonance excitation of shear waves by an acoustic wave propagating along the surface of the stone in water. For verification, force calculations were carried out for two materials: calcium oxalate monohydrate (a material of one type of kidney stones) and gypsum cement U-30. In calculations, the speed of the longitudinal wave was fixed, and the speed of the shear wave varied over a wide range. It turned out that the greatest radiation force was indeed achieved when the speed of shear waves in the stone was close to the speed of sound in the liquid.

PACS: 43.25.+y

Keywords: radiation force, waves scattering, acoustic beam, quasi-Gaussian beam, shear waves, elastic scatterer.

Received 04 July 2017.

Сведения об авторах

1. Николаева Анастасия Васильевна — аспирант; тел.: (495) 939-29-52, e-mail: av.nikolaeva@physics.msu.ru.
2. Сапожников Олег Анатольевич — доктор физ.-мат. наук, доцент, профессор; тел.: (495) 939-29-52, e-mail: oleg@acs366.phys.msu.ru.
3. Майкл Бэйли (Michael Bailey) — Ph.D., Senior Engineer; e-mail: bailey@apl.washington.edu.