

## Нелинейная эволюция сферической стоячей волны в акустически возбужденной жидкой капле

Е.А. Анненкова<sup>1,\*</sup>, О.А. Сапожников<sup>1,2,†</sup>, Д. Саймон<sup>2</sup>, У. Крайдер<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, физический факультет, кафедра акустики  
Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д.1, стр. 2

<sup>2</sup> Центр медицинского и промышленного ультразвука,  
Лаборатория прикладной физики,  
Университет штата Вашингтон

США, 98105, Сиэтл, 40-я улица, д. 1013

(Статья поступила 04.07.2017; Подписана в печать 13.09.2017)

При фокусировке интенсивного ультразвукового пучка на границу жидкость–воздух возникает явление, называемое ультразвуковой атомизацией. При повышении интенсивности ультразвука данное явление наблюдается в виде акустического фонтана. Скоростная съемка показывает, что фонтан, вырывающийся с поверхности жидкости после включения ультразвука, приобретает форму цепочки из капель, которые через некоторое время начинают взрываться. В данной работе развита нелинейная теория акустических и тепловых процессов в сферической капле для описания возможных механизмов развития неустойчивости капель. Показано, что в капле, акустически возбужденной на основном резонансе, с течением времени из-за нелинейности среды формируются сферические стоячие волны на высших кратных частотах. Указанный процесс генерации гармоник сопровождается значительным увеличением пикового акустического давления в центре капли. Отмечается, что рост отрицательного давления и дополнительный нагрев вблизи центра капли могут привести к кавитации и последующему взрыву капли. Разработанная теоретическая модель для описания акустического давления внутри сферического объема нелинейной вязкой жидкости основана на волновом уравнении квадратичного приближения. Его решение ищется в виде суммы гармонических составляющих с медленно изменяющимися амплитудами. На основе численного решения рассчитан спектр волны в разные моменты времени и исследованы закономерности эволюции пространственно-временной структуры акустического давления и температуры в капле.

PACS: 43.25.+y

УДК: 534.222.2

Ключевые слова: акустические фонтаны, ультразвуковая атомизация, интенсивный ультразвук, стоячие волны, взрыв капли.

### ВВЕДЕНИЕ

Если ультразвуковой излучатель направить на границу жидкость–воздух, то можно наблюдать явление, называемое ультразвуковой атомизацией. При этом происходит образование холодного пара, т. е. ультразвук превращает жидкость в аэрозоль. На этом принципе работают ультразвуковые увлажнители воздуха и ингаляторы, которые распыляют жидкость с помощью ультразвука. При повышении интенсивности ультразвука с поверхности жидкости начинает вырываться струя жидкости — возникает так называемый акустический фонтан. Наиболее просто это явление наблюдается под воздействием фокусированного ультразвука мегагерцового диапазона частот. Фонтан имеет форму цепочки из капель миллиметрового размера, которые через некоторое время по очереди начинают взрываться [1–4]. Механизм этих взрывов до сих пор до конца не ясен. Настоящая работа относится к области исследований особенностей нелинейной динамики внутри уже сформировавшейся капли

акустического фонтана.

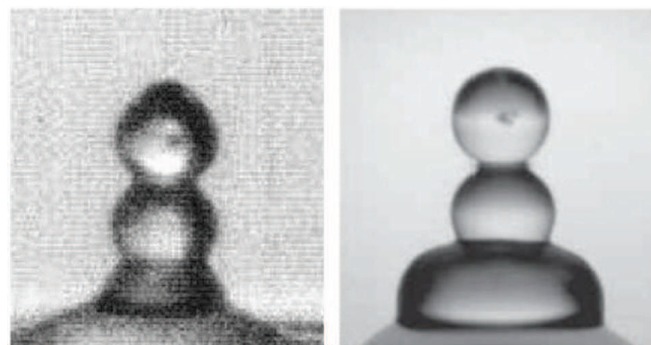


Рис. 1: Образование темного пятна в центре верхней капли акустического фонтана. Изображения взяты из работ [1] (слева) и [2] (справа)

### 1. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДИНАМИКИ ВНУТРИ КАПЛИ АКУСТИЧЕСКОГО ФОНТАНА

В акустически возбужденной капле в связи с нелинейностью процессов формируются гармоники стоячей волны. Теоретическое описание основано на квадра-

\*E-mail: a-a-annenkova@yandex.ru

†E-mail: oleg@acs366.phys.msu.ru

тичном приближении акустического волнового уравнения внутри вязкой жидкой сферы. Запишем волновое уравнение для акустического давления со всеми квадратично нелинейными членами  $Q_{nl}$  в правой части уравнения:

$$\Delta p - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = Q_{nl},$$

$$Q_{nl} = -\frac{\beta}{\rho_0 c_0^4} \frac{\partial^2 (p^2)}{\partial t^2} - \frac{\delta}{c_0^4} \frac{\partial^3 p}{\partial t^3} - \left( \Delta + \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \left( \frac{\rho_0 \mathbf{v}^2}{2} - \frac{p^2}{2\rho_0 c_0^2} \right).$$

Здесь  $p$  — акустическое давление,  $c_0$  — скорость звука в среде,  $\rho_0$  — плотность среды,  $\beta$  — коэффициент акустической нелинейности,  $\delta$  — диссипативный коэффициент,  $\mathbf{v}$  — колебательная скорость акустического возмущения. Движение жидкости предполагается сферически симметричным. Акустическое давление в центре капли конечно, а на границе капли равно нулю:

$$\begin{cases} p(r=0) < \infty, \\ p(r=a) = 0. \end{cases}$$

Здесь  $a$  — радиус капли. Решение акустического волнового уравнения внутри капли было взято в виде серии гармоник с неизвестными коэффициентами  $P_n$ :

$$p = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{P_n e^{-i\omega_n t} + P_n^* e^{i\omega_n t}}{2} \frac{\sin(k_n r)}{k_n r},$$

где  $k_n = \pi n/a$  и  $\omega_n = k_n c_0$ . Анализ поведения величин  $P_n$  удобно проводить с использованием метода медленно меняющихся амплитуд гармоник. При этом получается система связанных нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\frac{dP_n}{dt} + \frac{\delta \omega_n^2}{2\rho_0 c_0^2} P_n = -i\beta \frac{n^2}{8a\rho_0 c_0} \times \left\{ \begin{aligned} & 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{P_m P_{n+m}}{m(n+m)} (S_{2n} + S_{2m} - S_{2(n+m)}) \\ & - \sum_{m=1}^{n-1} \frac{P_m P_{n-m}}{m(n-m)} (S_{2n} - S_{2m} - S_{2(n-m)}) \end{aligned} \right\}, \quad (1)$$

где  $S_n = \text{Si}(\pi n)$ , а  $\text{Si}(\cdot)$  — интегральный синус. Бесконечная система (1) была приближена конечной системой уравнений в предположении ограниченного (большого) числа удерживаемых гармоник, а затем была решена численно методом конечных разностей.

## 2. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

Численные решения показаны на рис. 2,а, где изображены зависимости нормированных амплитуд гармоник в центре капли от их номера в разные моменты

времени. Здесь  $P_n$  — коэффициент амплитуды  $n$ -ой гармоники, и  $P_0$  — коэффициент начальной амплитуды 1-ой гармоники. На рис. 2,б представлены результаты расчета временных зависимостей нормированных амплитуд первых четырех гармоник в центре водяной капли радиуса  $a = 0.75$  мм, исходно возбужденной на основной моде колебаний (соответствующая резонансная частота равна 1 МГц). Когда  $P_0 = 1$  МПа, начальные колебания на фундаментальной частоте ультразвука возбуждают более высокие гармоники стоячих волн, приводя к сильному искажению формы волны давления, как показано на рис. 3. Временной профиль акустического давления в центре капли заметно изменяется с течением времени: сначала образуется крутой участок, а потом вокруг него возникают сильные отрицательный и положительный пики.

Вязкое поглощение в капле приводит к нагреву жидкости из-за перехода акустической энергии в тепло. Так как энергия более высоких гармоник локализована вблизи центра капли, тепловыделение наиболее эффективно в самом центре капли. Энергия, диссипируемая в единице объема в единицу времени (в среднем по периоду), равна сумме вкладов от каждой из гармоник:

$$Q_{heat} = \frac{b}{4\rho_0^2 c_0^2} \sum_{n=1}^{\infty} k_n^2 |P_n|^2 \times \left\{ \frac{1}{(k_n r)^2} - \frac{\sin(2k_n r)}{(k_n r)^3} + \frac{\sin^2(k_n r)}{(k_n r)^4} \right\}.$$

Пусть  $T$  — приращение температуры относительно исходного равновесного уровня,  $\chi = \kappa/\rho_0 C_p$  — температуропроводность,  $\kappa$  — коэффициент теплопроводности,  $C_p$  — удельная теплоемкость жидкости. Уравнение теплового баланса имеет вид:

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \chi \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) = \frac{Q_{heat}(r, t)}{\rho_0 C_p}.$$

Наиболее просто приращение температуры находится в пренебрежении теплопроводностью:

$$T(r, t) = \frac{1}{\rho_0 C_p} \int_0^t Q_{heat}(r, t') dt'.$$

Эта формула предсказывает заметное повышение температуры в центре капли, вплоть до кипения, даже при относительно низких значениях исходного акустического давления в центре возбужденной капли. Однако такая упрощенная оценка не учитывает того факта, что область локализации тепловых источников чрезвычайно мала и поэтому эффект диффузии тепла может быть заметным. Чтобы учесть вклад теплопроводности, приращение температуры удобно разложить по пространственным гармоникам — аналогично тому, как это делалось для акустического давления:

$$T(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \theta_n(t) \cdot \frac{\sin k_n r}{k_n r},$$

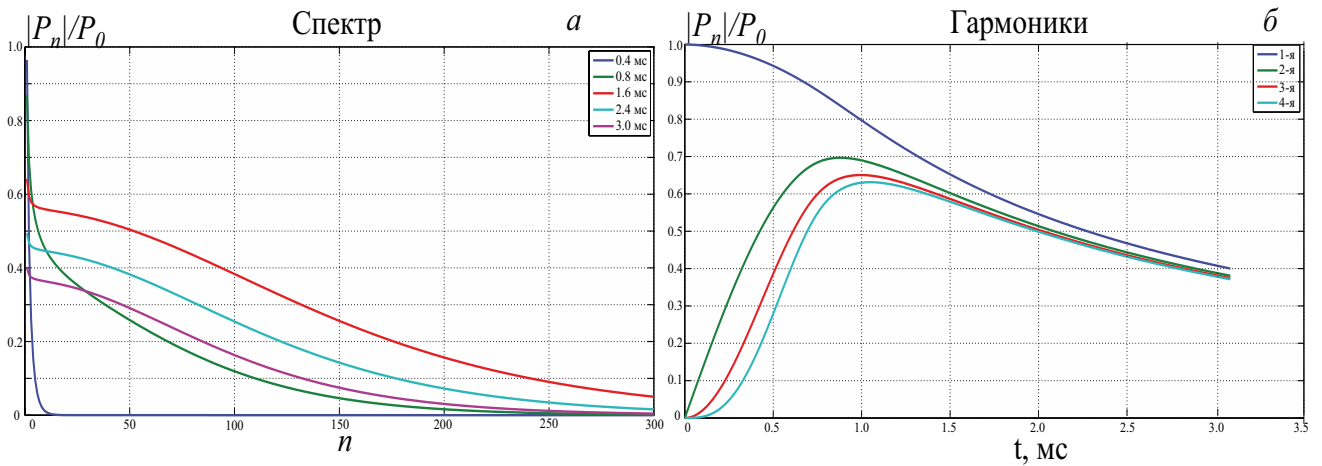


Рис. 2: Спектр волны (зависимость нормированных амплитуд гармоник  $|P_n|/P_0$  от их номера) в центре водяной капли радиуса 0.75 мм и начальным давлением в центре капли  $P_0 = 1$  МПа в разные моменты времени (а) и зависимость нормированных амплитуд первых четырех гармоник  $|P_n|/P_0$  в центре капли от времени (б)

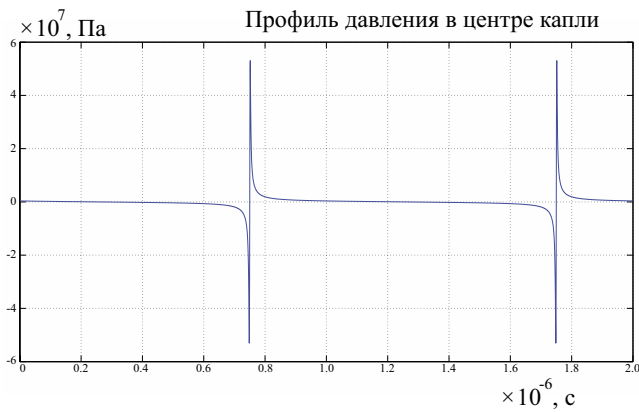


Рис. 3: Временной профиль акустического давления в центре капли спустя 1 мс после задания начального гармонического возбуждения на основной частоте

где  $\theta_n$  — амплитуды соответствующих гармоник. После некоторых преобразований уравнение теплового баланса сводится к системе связанных нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка для гармоник температуры:

$$\frac{d\theta_n}{dt} + \frac{\pi^2 \chi}{a^2} n^2 \theta_n = \frac{b\pi}{2a^2 \rho_0^3 c_0^2 C_p} n \sum_{m=1}^{n_{max}} |P_m|^2 \times \frac{(2m+n)(2m-n)}{4m^2} \left( S_n + \frac{S_{2m-n} - S_{2m+n}}{2} \right).$$

Расчет температуры на основе данной системы показал, что учет влияния теплопроводности (второе слагаемое в левой части) действительно важен. В условиях, характерных для капель акустического фонтана, предсказанный нагрев в центре капли оказался не выше долей градуса.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В результате работы построен алгоритм, позволяющий рассчитывать временные зависимости давлений и распределения температуры внутри акустически возбужденной капли жидкости, используя численное решение системы связанных нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка для коэффициентов амплитуд акустического давления. Начальные колебания на основной ультразвуковой частоте приводят к росту амплитуд более высоких гармоник. В результате данного процесса происходит сильное искажение формы волны давления. Оказалось, что, несмотря на заметное усиление диссипации в центре капли по сравнению с линейным случаем, эффект теплопроводности приводит к тому, что нагрев центра капли не превышает долей градуса. В то же время, нелинейное усиление пикового давления довольно существенно. В практически реализуемых режимах формирования акустического фонтана в центре капель могут достигаться уровни отрицательного давления в десятки и даже сотни мегапаскалей, что близко или превышает уровни прочности жидкости на разрыв. Проведенный анализ позволил сделать вывод о том, что основным механизмом взрывов капель является разрыв жидкости в центре капли (кавитация) под действием высоких отрицательных давлений, вызванных нелинейно-акустическими процессами. Полученные результаты находятся в согласии с экспериментальными наблюдениями взрывов капель, что позволяет глубже понять процессы, сопровождающие явление ультразвуковой атомизации. Работа поддержана грантом РФФИ № 17-02-00261 и грантом Президента РФ по программе поддержки ведущих научных школ № НШ-7062.2016.2.

- 
- [1] Boguslavskii Y. Y., Eknadiosyants O. K. Soviet Physics–Acoustics. 1969. **15**, N 1. P. 14.  
[2] Simon J. C., Sapozhnikov O. A., Khokhlova V. A., Wang Y.-N., Crum L. A., Bailey M. R. Phys. Med. Biol. 2012. **57**. P. 8061.  
[3] Simon J. C., Sapozhnikov O. A., Khokhlova V. A., Crum L. A., Bailey M. R. J. Fluid Mech. 2015. **766**. P. 129.  
[4] Tomita Y. Physics of Fluids. 2014. **26**. P. 097105.

---

## Nonlinear evolution of a spherical standing wave in an acoustically excited liquid drop

E. A. Annenkova<sup>1,a</sup>, O. A. Sapozhnikov<sup>1,2,b</sup>, J. C. Simon<sup>2</sup>, W. Kreider<sup>2</sup>

<sup>1</sup>*Department of Acoustics, Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University. Moscow 119991, Russia*

<sup>2</sup>*CIMU, Applied Physics Laboratory, University of Washington. 1013 NE 40th Street, Seattle 98105 USA*

*E-mail: <sup>a</sup>a-a-annenkova@yandex.ru, <sup>b</sup>oleg@acs366.phys.msu.ru*

When focusing of an intensive ultrasonic beam on liquid-air boundary, a phenomenon called ultrasonic atomization takes place. At moderate levels of ultrasound intensity an acoustic fountain is observed that has the form of a chain of drops, which begin to explode after the fountain is created. The mechanism of these explosions is still unclear. In this work a nonlinear theory of such phenomenon is developed. It is supposed that harmonics of standing waves are formed in a liquid drop because of acoustic nonlinearity, and that process leads further either to pressure amplification at the drop center and formation of a superheated vapor bubble; both effects may be a reason of drop explosion. The theoretical model is based on a quadratic approximation of a wave equation for acoustic pressure in a viscous spherical liquid drop. The solution was taken in the form of a series of harmonics with unknown coefficients. The method of slowly varying amplitudes is applied for further simplification. On the basis of the numerical solution of this problem the wave spectrum in the drop center at different time moments was calculated and the time profile of acoustic pressure in the drop center was predicted; it is strongly distorted with the course of time: at first the sharp section is formed, and then the strong negative and positive peaks appear around it. Observed growth of the negative pressure in the drop center denotes an existence of cavitation in the drop that can be the reason of bubble formation leading further to the drop explosion.

PACS: 43.25.+y

*Keywords:* acoustic fountains, ultrasonic atomization, intense ultrasound, standing waves, drop explosion.

*Received 04 July 2017.*

### Сведения об авторах

1. Анненкова Елена Александровна — аспирант; тел.: (495) 939-29-52, e-mail: a-a-annenkova@yandex.ru.
2. Сапожников Олег Анатольевич — доктор физ.-мат. наук, доцент, профессор; тел.: (495) 939-29-52, e-mail: oleg@acs366.phys.msu.ru.
3. Саймон Джулиана (Simon Julianna) — ассистент Пенсильванского университета.
4. Крайдер Уэйн (Kreider Wayne) — ст. инженер университета штата Вашингтон.