

Моделирование акустических полей с помощью теории случайных матриц

Д. В. Макаров*

Тихоокеанский океанологический институт имени В. И. Ильичева ДВО РАН

Россия, 690041, Владивосток, ул. Балтийская, д. 43

(Статья поступила 25.06.2017; Подписана в печать 11.09.2017)

Рассматривается метод моделирования акустических полей в случайно-неоднородном подводном звуковом канале, основанный на построении пропагатора в базисе нормальных мод волновода. Взаимодействие мод моделируется с помощью случайных матриц с некоррелированными матричными элементами, дисперсии которых определяются спектром неоднородности. Проведено сравнение спектральной статистики получаемого таким образом пропагатора с соответствующими данными, полученными путем прямого решения параболического уравнения. Показано, что пропагатор, построенный с помощью случайных матриц, способен корректно воспроизводить процесс декогеренции акустического поля по мере удаления от источника звука.

PACS: 43.30.+m.

УДК: 534.2

Ключевые слова: теория случайных матриц, подводный звуковой канал, рассеяние звука.

ВВЕДЕНИЕ

Разработка эффективных методов численного моделирования дальнего распространения звука в случайно-неоднородных подводных звуковых каналах является одной из наиболее важных задач акустики океана. Даже малая горизонтальная неоднородность скорости звука становится существенным фактором на расстояниях порядка сотен километров от источника звука [1, 2]. По этой причине сравнительно легко решаемые горизонтально-однородные и адиабатически-неоднородные модели подводного звукового канала не способны воспроизвести реальную картину звукового поля. Ситуация усугубляется при расчетах акустических полей, создаваемых широкополосными импульсными акустическими сигналами. Вкупе со статистическим моделированием с помощью метода Монте-Карло, это требует достаточно значительных численных ресурсов. В работах [3, 4] предложен достаточно элегантный метод решения данной проблемы, основанный на применении теории случайных матриц. В этом методе не требуется прямое решение волнового уравнения. В его основе лежит модовое представление акустического поля, при этом коэффициенты межмодового взаимодействия представляются как случайные величины, статистика которых определяется полем неоднородности скорости звука. Корреляции между различными межмодовыми переходами не учитываются. Вместе с тем, такие корреляции могут порождать различные когерентные явления, которые могут наблюдаться в экспериментах. К числу таких явлений можно отнести когерентные лучевые кластеры [5]. В работе [6] было показано, что когерентные кластеры проявляются в спектральной статистике пропагатора, определяющего динамику модовых амплитуд. В связи с этим можно задаться

вопросом о том, насколько хорошо теория случайных матриц воспроизводит спектральные свойства реального пропагатора. Именно этому вопросу и посвящена данная работа. Интерес к спектрам здесь связан с тем, что именно в них заложена информация о физике распространения. Другими словами, спектральная статистика является весьма чувствительным индикатором возможных противоречий между результатами теории случайных матриц и прямого моделирования.

1. ПРОПАГАТОР АКУСТИЧЕСКОГО ПОЛЯ

Акустическое поле на расстоянии $r = r_F$ от источника может быть формально представлено в виде

$$\Psi(r_F, z) = \hat{G}(r_0, r_F) \Psi(r_0, z),$$

где введен пропагатор акустического поля $\hat{G}(r_0, r_F)$. С помощью модового представления пропагатор может быть представлен в виде матрицы, элементы которой определяются по формуле

$$G_{mn}(r_0, r_F) = \int \psi_m^* \hat{G}(r_0, r_F) \psi_n dz,$$

где $\hat{G}(r_0, r_F) \psi_n$ — акустическое поле при $r = r_F$, порождаемое начальным условием в виде n -й моды ψ_n . Имеем:

$$\begin{aligned} \hat{G}(r_0, r_F = r_J) &= \hat{G}(r_{J-1}, r_J) \hat{G}(r_{J-2}, r_{J-1}) \dots \\ &\dots \hat{G}(r_1, r_2) \hat{G}(r_0, r_1). \end{aligned} \quad (1)$$

В дальнейшем мы положим $r_0 = 0$. Кроме того, мы будем рассматривать эквидистантное разбиение интервала $[0 : r_J]$ с шагом r_b , а также неоднородности, статистические свойства которых не меняются вдоль трассы. В первом порядке теории возмущений мы имеем [2]

$$\begin{aligned} \hat{G}(r_{j-1}, r_j) &= \hat{G}(r_b) = \delta_{mn} e^{-ik_0 E_m r_b} (\hat{I} - i\hat{A}), \\ \hat{A} &= k_0 \int_{r'=0}^{r_b} e^{ik_0(E_m - E_n)r'} \hat{V}(r') dr'. \end{aligned} \quad (2)$$

*E-mail: makarov@poi.dvo.ru

Здесь введена матрица $\hat{V}$, элементы которой равны

$$V_{mn}(r) = \int \psi_m^*(z) V(r, z) \psi_n(z) dz.$$

В основе подхода, предложенного в [3,4], лежит представление матриц $\hat{A}$, соответствующих отдельным промежуточным сегментам, в виде случайных некоррелированных гауссовых матриц, статистические свойства которых определяются свойствами случайной неоднородности. В частности, элементы матрицы $\hat{A}$ представляются в виде произведения

$$A_{mn}(r_b, k_0) = \sigma_{mn}(r_b, k_0) z_{mn}(k_0),$$

где z_{mn} — случайная гауссова комплексная величина со стандартным отклонением, равным 1, а величина σ_{mn} определяется пространственным спектром неоднородности. Тогда процесс вычисления акустического поля можно условно провести в два этапа. На первом этапе мы, согласно (1), перемножаем случайные матрицы и получаем результирующий пропагатор. На втором этапе мы действуем этим пропагатором на вектор начального состояния в модовом представлении, тем самым получая модовые амплитуды акустического поля на требуемом расстоянии от источника.

2. СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ПРОПАГАТОРА

Информация о характере распространения волн заключена в спектре пропагатора. Собственные функции и собственные значения пропагатора удовлетворяют уравнению

$$\hat{G}(r_0, r_F) \Phi_m(z) = g_m \Phi_m(z), g_m = |g_m| e^{i\phi_m}, \quad \phi_m \in \mathbb{R}.$$

Основной интерес здесь вызывают собственные фазы пропагатора ϕ_m . Как было показано в работе [6], волновой хаос, обусловленный рассеянием звука на внутренних волнах, проявляется в статистике так называемых межуровневых расстояний

$$s = \frac{k_0 M (\phi_{m+1} - \phi_m)}{2\pi}, \quad \phi_{M+1} = \phi_1 + \frac{2\pi}{k_0}, \\ m = 1, 2, \dots, M,$$

где фазы ϕ_m пронумерованы в порядке возрастания, а M — общее число канальных мод, распространяющихся без контакта с дном. Вид статистического распределения межуровневых расстояний качественно зависит от интенсивности перекачки акустической энергии между различными модами. Так, если рассеяние на неоднородности является незначительным и моды слабо взаимодействуют друг с другом, то матрица пропагатора близка к диагональной, а статистика межуровневых расстояний описывается распределением Пуассона

$$\rho(s) \sim \exp(-s). \quad (3)$$

В противоположном случае, когда рассеяние звука приводит к достаточно интенсивной перекачке энергии между модами, амплитуды матричных элементов медленно спадают по мере удаления от главной диагонали. В этом режиме возникает эффект «расталкивания» собственных значений [6], а статистика межуровневых расстояний описывается распределением Вигнера

$$\rho(s) \sim s^2 \exp\left(-\frac{4s^2}{\pi}\right). \quad (4)$$

На практике мы можем встретиться с ситуацией, когда сильному рассеянию подвержена только некоторая группа мод. В этом случае статистика межуровневых расстояний имеет некоторую промежуточную форму между распределениями Пуассона и Вигнера. В отдельных случаях удастся найти аналитическую форму такого распределения. Так, рассмотрим случай, когда число канальных мод является достаточно большим, т.е. частота звука достаточно велика. Кроме того, пусть матрица пропагатора может быть разделена на два почти изолированных друг от друга блока: один соответствует модам со слабым рассеянием, а другой — модам с сильным рассеянием. Тогда статистика межуровневых расстояний подчиняется распределению Берри–Робника [6]

$$\rho(s) = \left[v_r^2 \operatorname{erfc}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2} v_c s\right) + \left(2v_r v_c + \frac{\pi}{2} v_c^3 s\right) \exp\left(-\frac{\pi}{4} v_c^2 s^2\right) \right] \exp(-v_r s), \quad (5)$$

где v_r и v_c — доли мод со слабым и сильным рассеянием, соответственно, $v_r + v_c = 1$.

В качестве примера мы рассмотрим подводный звуковой канал с биэкспоненциальным профилем скорости звука [7, 8]

$$c_b(z) = c_0 + \Delta c(z) = c_0 \left[1 + \frac{b^2}{2} (e^{-az} - \kappa)^2 \right],$$

где $c_0 = 1490$ м/с, $a = 0.5$ м⁻¹, $b = 0.557$ и $\kappa = 0.6065$. Предполагается, что глубина океана не меняется вдоль

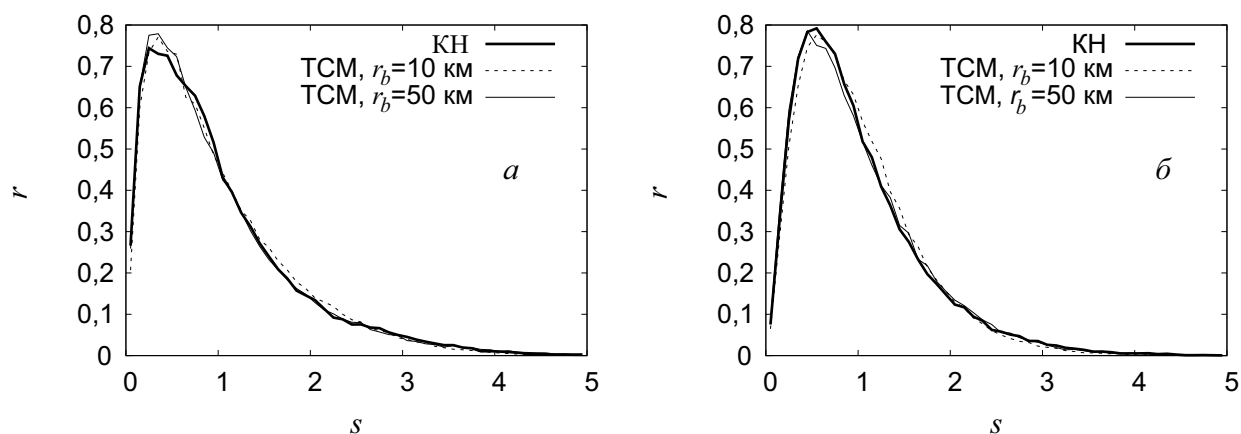


Рис. 1: Распределение межуровневых расстояний для $a - r_F = 50$ км и $b - r_F = 250$ км. «КН» — кривые, полученные путем прямого решения параболического уравнения с помощью схемы Крэнка–Николсон, «ТСМ» — результаты, полученные с помощью теории случайных матриц при разных значениях шага пропагатора r_b

трассы и равна 4 км. При построении модели случайной неоднородности $\delta c(r, z)$ использован метод, предложенный в работе [9].

На рис. 1 представлены распределения межуровневых расстояний, полученные как с помощью теории случайных матриц, так и путем прямого решения параболического уравнения с использованием схемы Крэнка–Николсон. Моделирование с помощью случайных матриц производилось для двух значений шага пропагатора r_b : 10 и 50 км. Все представленные кривые соответствуют частоте звука 50 Гц.

Мы видим высокую степень схожести между кривыми, полученными с помощью различных методов. Это указывает на то, что моделирование с помощью случайных матриц обеспечивает достаточно хорошее согласие с прямым решением. Сравнивая распределения, рассчитанные для разных значений расстояния от источника r_F , можно отметить, что основные различия касаются области малых значений s : при $r_F = 250$ км доля малых межуровневых расстояний оказывается значительно ниже, что свидетельствует об усилении расталкивания собственных значений, характерном для перехода от распределения Пуассона (3) к распределению Вигнера (4). Это соответствует процессу декогеренции акустического поля вследствие рассеяния звука на случайной неоднородности. Чтобы отследить динамику этого процесса с ростом дистанции между источником и приемником, мы можем воспользоваться аппроксимацией распределений межуровневых расстояний с помощью формулы (5). На рис. 2 представлена зависимость доли когерентных (т. е. слабо рассеивающихся) мод v_r как функция расстояния от источника. Мы видим, что, несмотря на быстрое спадание, некоторая доля слабо рассеивающихся мод сохраняется до расстояний порядка 500 км. Кроме того, отметим, что кривая, соответствующая шагу пропагатора $r_b = 50$ км, гораздо лучше согласуется с результатами прямого расчета, чем кривая, соответствующая $r_b = 10$ км, из которой следует практически полное ис-

чезновение когерентных мод уже на расстоянии 400 км от источника. Это различие связано с вкладом горизонтальных корреляций случайной неоднородности. Если шаг пропагатора выбран слишком малым, то пропагаторы, соответствующие соседним сегментам волновода, не могут считаться полностью статистически независимыми. С другой стороны, шаг пропагатора не должен быть и слишком большим, поскольку в этом случае становится неприменимой теория возмущений первого порядка, лежащая в основе формулы (2).

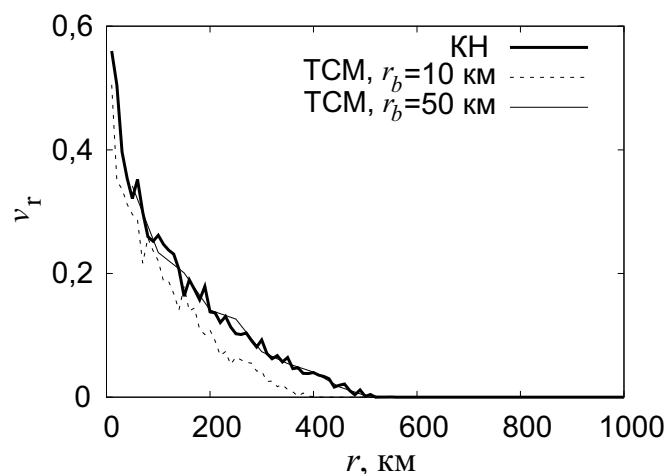


Рис. 2: Доля мод со слабым рассеянием как функция расстояния от источника. Использованы те же обозначения кривых, что и на рис. 1

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В представленной работе проведено тестирование нового подхода к моделированию акустических полей, основанного на применении случайных матриц. В качестве метода тестирования был использован статисти-

ческий анализ спектральных свойств распространения звука. Показано, что теория случайных матриц позволяет достаточно корректно описать процесс декогеренции акустического поля вследствие рассеяния на случайных неоднородностях.

Работа выполнена при поддержке РФФИ в рамках проекта 16-35-60040. Часть работы выполнена в рамках госбюджетной тематики ТОИ ДВО РАН «Математическое моделирование и анализ динамических процессов в океане» (№ 117030110034).

-
- [1] Вировлянский А. Л., Макаров Д. В., Праниц С. В. УФН. 2012. **182**, № 1. С. 19.
[2] Макаров Д. В., Коньков Л. Е., Улейский М. Ю. Акуст. Ж. 2008. **54**, № 3. С. 439.
[3] Hegewisch K. C., Tomsovic S. Europhys. Lett. 2012. **97**, N 3. 34002.
[4] Hegewisch K. C., Tomsovic S. J. Acoust. Soc. Am. 2013. **134**, N 4. P. 3174.
[5] Makarov D. V., Uleysky M. Yu., Budyansky M. V., Prants S. V. Phys. Rev. E. 2006. **73**, N 6. 066210.
[6] Makarov D. V., Kon'kov L. E., Uleysky M. Yu., Petrov P. S. Phys. Rev. E. 2013. **87**, N 1. 012911.
[7] Макаров Д. В., Праниц С. В., Улейский М. Ю. ДАН. 2002. **382**, № 3. С. 394.
[8] Makarov D. V., Uleysky M. Yu., Prants S. V. Chaos. 2004. **14**, N 1. P. 79.
[9] Colosi J. A., Brown M. G. J. Acoust. Soc. Am. 1998. **103**, N 4. P. 2232.
-

Modeling of acoustic wavefields by means of the random matrix theory

D. V. Makarov

V. I. Il'ichev Pacific Oceanological Institute of FEB RAS
43, Baltiyskaya Street, Vladivostok 690041, Russia
E-mail: makarov@poi.dvo.ru

A method of acoustic wavefield modeling in a randomly-inhomogeneous underwater sound channel is considered. The method is based on the construction of a propagator in the basis of normal modes of the waveguide. Mode coupling is modeled using random matrices with uncorrelated elements whose variances are determined by inhomogeneity spectrum. Spectral statistics of such propagator is compared with the corresponding data obtained via direct solution of the parabolic equation. It is shown that the propagator constructed via random matrices describes fairly the process of wavefield decoherence with increasing range.

PACS: 43.30.+m

Keywords: random matrix theory, underwater sound channel, sound scattering.

Received 25 June 2017.

Сведения об авторе

Макаров Денис Владимирович — доктор физ.-мат. наук, вед. науч. сотрудник; тел.: 950-283-92-93, e-mail: makarov@poi.dvo.ru.
