

Учёт CP -нарушения в экспоненциальной параметризации смешивания нейтрино

К. В. Жуковский*

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова,
физический факультет, кафедра теоретической физики
Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2

(Статья поступила 20.06.2017; Подписана в печать 21.06.2017)

Исследуется экспоненциальная параметризация матрицы смешивания нейтрино; она позволяет выделить отдельно вклады чисто вращательных компонент матрицы смешивания и вклады элементов матрицы, отвечающих за CP -нарушение. Находится логарифм матрицы смешивания. С учётом последних экспериментальных данных о смешивании нейтрино вычисляются точные значения каждого из параметров экспоненциальной матрицы смешивания. Выделяются действительная часть, соответствующая вращению, и мнимая часть, соответствующая CP -нарушению. Демонстрируется факторизация матрицы смешивания в виде произведения вращений вокруг действительной и мнимой осей. Подтверждается гипотеза дополнительности смешивания кварков и нейтрино.

PACS: 14.60.Pq, 12.15.Ff, 11.30.Eg, 02.20.-a.

УДК: 53.01, 539.123, 539.12.01

Ключевые слова: нейтрино, смешивание, PMNS матрица, CP нарушение, экспоненциальная параметризация

ВВЕДЕНИЕ

Стандартная модель электрослабых взаимодействий в настоящее время включает нейтрино с массовыми состояниями ν_1, ν_2, ν_3 , соответствующими флейворным состояниям ν_e, ν_μ, ν_τ [1–3]. Конечная масса означает наличие осцилляций нейтрино [4, 5]: распространяясь, нейтрино меняют свой флейвор, что было экспериментально определено при смешивании солнечных, атмосферных, и реакторных нейтрино. Соответствующий переход из базиса массовых состояний нейтрино в базис флейворных состояний и обратно [6] (ПМНС) происходит по аналогии с матрицей смешива-

ния для кварков Кабиббо–Кобаяши–Маскава (СКМ). Флейворные состояния нейтрино ν_e, ν_μ, ν_τ , представляют собой линейную комбинацию массовых состояний ν_1, ν_2, ν_3 ; этот переход описывается унитарной матрицей смешивания U_{PMNS} Понтекорво–Маки–Накагавы–Саката (PMNS):

$$|\nu_\alpha\rangle = \sum_{i=1,2,3} U_{PMNS\alpha i}^* |\nu_i\rangle, \quad U_{PMNS\alpha i} \equiv \langle \nu_\alpha | \nu_i \rangle, \quad (1)$$

$$\alpha = e, \mu, \tau, \quad i = 1, 2, 3, \quad U_{PMNS} = U_{st} P_{Mjr},$$

где

$$U_{st} = \begin{matrix} \nu_\alpha \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{matrix} \begin{pmatrix} \nu_1 & & \nu_2 & & \nu_3 \\ & c_{12}c_{13} & & & \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta_{CP}} & & s_{12}c_{13} & & s_{13}e^{-i\delta_{CP}} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta_{CP}} & & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta_{CP}} & & s_{23}c_{13} \\ & & -c_{12}s_{23} - s_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta_{CP}} & & c_{23}c_{13} \end{pmatrix}, \quad (2)$$

где $c_{ij} = \cos\theta_{ij}$, $s_{ij} = \sin\theta_{ij}$, $i, j = 1, 2, 3$, θ_{ij} — углы смешивания, δ_{CP} — CP нарушающая фаза, $P_{Mjr} = \text{diag}(e^{i\alpha_1/2}, e^{i\alpha_2/2}, 1)$ — матрица для майорановского нейтрино. Мы ограничимся дираковским нейтрино, так что $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. Таким образом, матрица ПМНС полностью определяется четырьмя независимыми параметрами: тремя углами смешивания $\theta_{12}, \theta_{23}, \theta_{13}$ и дираковской фазой δ , соответствующей CP -нарушению (комбинации зарядовой и пространственной четностей) [7]. Тривимаксимальная параметризация, в которой $\theta_{12} = \arctan(1/\sqrt{2}) \cong 35.25^\circ$, $\theta_{23} = \pi/4 = 45^\circ$, $\theta_{13} = 0$ и $\delta_{CP} = 0$ до недавнего времени хорошо описывала эксперимент, но в настоящий момент показано, что $\theta_{13} \neq 0$ и что $\delta_{CP} \neq 0$. В отличие от кварков, для нейтрино углы смешивания θ_{12}

и θ_{23} велики, поэтому нет малого параметра, такого как $\lambda = \sin\theta_{Cabibbo} \approx 0.22$ для кварков, чтобы провести разложение по нему.

1. ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНАЯ МАТРИЦА СМЕШИВАНИЯ И ЕЁ ЛОГАРИФМ

Смешивание с учётом CP -нарушения можно описать в экспоненциальной параметризации матрицы смешивания:

$$U_{\text{exp}} = \exp \mathbf{A}. \quad (3)$$

Зная экспериментальные значения элементов матрицы смешивания U , можно воссоздать матрицу \mathbf{A} в показа-

теле экспоненты (3) вычислив логарифм матрицы смешивания, например, с помощью её Жордановой формы. Для этого пригоден следующий алгебраический метод, недавно использованный для вычисления гамильтоновых операторов в [8]. Не приводя детали (см. [8]) отметим, что для вычисления функции матрицы \mathbf{U} используется следующая Жорданова форма \mathbf{U} :

$$\mathbf{J}_U = \mathbf{E}^{-1} \mathbf{U} \mathbf{E} = \text{diag}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3), \quad (4)$$

где матрица \mathbf{E} состоит из

$$\mathbf{E} = (e_1, e_2, e_3), \quad (5)$$

Здесь e_i — собственные векторы и ε_i — собственные значения соответствующего уравнения на собственные значения:

$$\mathbf{U} e_i = \varepsilon_i e_i. \quad (6)$$

Тогда для функции $f(\mathbf{U})$ получаем соответствующую Жорданову форму:

$$\mathbf{J}_{f(U)} = \mathbf{E}^{-1} f(\mathbf{U}) \mathbf{E} = \text{diag}(f(\varepsilon_1), f(\varepsilon_2), f(\varepsilon_3)), \quad (7)$$

которая позволяет найти искомое представление для функции $f(\mathbf{U}) = \mathbf{E} \mathbf{J}_{f(U)} \mathbf{E}^{-1}$. Отсюда легко получается интересный нас логарифм матрицы смешивания:

$$\log \mathbf{U} = \mathbf{E} \text{diag}(\log(\varepsilon_1), \log(\varepsilon_2), \log(\varepsilon_3)) \mathbf{E}^{-1}, \quad (8)$$

где ε_i и e_i определяются из уравнения на собственные значения (6) и матрица состоит из собственных векторов e_i (см. (5)). Обозначенный выше алгоритм легко реализуется с помощью любой программы аналитических вычислений, например, *Mathematica*.

Измеренные в 2016 г. углы смешивания для нейтрино [9, 10] составляют

$$\theta_{12} \cong 33.72^\circ, \quad \theta_{23} \cong 49.3^\circ, \quad \theta_{13} \cong 8.47^\circ, \quad (9)$$

$$\delta_{CP} \cong 272^\circ.$$

Исходя из этих значений, получаем экспоненту матрицы смешивания в виде

$$A = \begin{pmatrix} -0.0253632i & 0.551703 + 0.0557619i & -0.249131 + 0.136429i \\ -0.551703 + 0.0557619i & 0.0502214i & 0.834211 + 0.0319945i \\ 0.249131 + 0.136429i & -0.834211 + 0.0319945i & -0.0248583i \end{pmatrix}, \quad (10)$$

так, что экспоненциальная параметризация (3) с (10) для \mathbf{A} *точно* воспроизводит экспериментальные данные. Диагональные элементы матрицы \mathbf{A} (10) малы, её след точно равен нулю: $Sp[A] = 0$, и она представлена в виде следующей суммы:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_{Rot} + \mathbf{A}_{CP1} + \mathbf{A}_{diag Im}, \quad (11)$$

$$\mathbf{A}_{Rot} = \text{Re}[\mathbf{A}] = \begin{pmatrix} 0 & 0.551703 & -0.249131 \\ -0.551703 & 0 & 0.834211 \\ 0.249131 & -0.834211 & 0 \end{pmatrix}, \quad (12)$$

(12) где \mathbf{A}_{Rot} описывает действительное вращение, за CP -нарушение отвечает матрица

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{CP1} &= i \text{Im}[\mathbf{A} - \mathbf{A}_{diag Im}] = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0.0557619i & 0.136429i \\ 0.0557619i & 0 & 0.0319945i \\ 0.136429i & 0.0319945i & 0 \end{pmatrix}, \quad (13) \end{aligned}$$

а мнимая диагональ матрицы \mathbf{A} (10) представлена матрицей

$$\mathbf{A}_{diag Im} = i \text{diag}\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}, \quad (14)$$

в которой элементы 1 и 3 почти точно равны друг другу: $\alpha_1 \cong \alpha_3 \cong -\alpha_2/2$, и соответственно составляют практически точно половину величины матричного элемента (2,2): $\alpha_2 = 0.0502214$. Мнимая диагональ $\mathbf{A}_{diag Im}$ даёт комплексную диагональную экспоненциальную матрицу

$$\mathbf{P}_{diag Im} = \exp[\mathbf{A}_{diag Im}] = \text{diag}\{e^{i\alpha_1}, e^{i\alpha_2}, e^{i\alpha_3}\}, \quad (15)$$

внешне напоминающую вклад для майорановских частиц, но происходящую от CP -нарушения. Соответствующие фазы очень малы $|\alpha_i| \approx 10^{-2}$.

Матрица $\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}_{Rot} + \mathbf{A}_{CP1}$ представляет сумму слагаемого \mathbf{A}_{Rot} , отвечающего за смешивание без CP -нарушения и соответствующее ему вращение вокруг действительной оси, и слагаемого \mathbf{A}_{CP1} , отвечающего за CP -нарушение и соответствующее ему вращение вокруг мнимой оси. Для $\delta_{CP} = 272^\circ$:

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}_{Rot} + \mathbf{A}_{CP_1} = \begin{pmatrix} 0 & 0.554514e^{i5.7^\circ} & 0.284041e^{i151.3^\circ} \\ -0.554514e^{-i5.7^\circ} & 0 & 0.834825e^{i2.2^\circ} \\ -0.284041e^{-i151.3^\circ} & -0.834825e^{-i2.2^\circ} & 0 \end{pmatrix}. \quad (16)$$

Экспоненциальная матрица смешивания является антиэрмитовой, что обеспечивает унитарность матрицы смешивания: $\mathbf{U}_{\text{exp}}^{-1} \cdot \mathbf{U}_{\text{exp}} = \mathbf{U}_{\text{exp}}^+ \cdot \mathbf{U}_{\text{exp}} = \mathbf{I}$. Основное достоинство экспоненциальной параметризации в том, что она позволяет факторизовать вклады вращения и CP -нарушения в виде новой унитарной параметризации [11]:

$$\mathbf{V} = \mathbf{P}_{Rot} \mathbf{P}_{CP} \mathbf{P}_{Mjr}, \quad (17)$$

где за CP -нарушение отвечает экспоненциальная матрица $\mathbf{P}_{CP} = e^{\mathbf{A}_{CP}}$, а её показатель \mathbf{A}_{CP} — соответственно CP нарушающие компоненты матрицы \mathbf{A} . Указанная выше факторизация (17) может быть реализована также путем разделения действительной и мнимой частей её показателя \mathbf{A} (3):

$$\mathbf{A}_{Rot} = \text{Re}[\mathbf{A}], \quad \mathbf{A}_{CP} = i\text{Im}[\mathbf{A}]. \quad (18)$$

Естественно, экспоненциальная параметризация (3) с учетом (10) даёт в точности экспериментальные данные:

$$\begin{aligned} \exp[\mathbf{A}_{Rot} + \mathbf{A}_{CP_1} + \mathbf{A}_{\text{diag Im}}] &= \mathbf{U}_{\text{best fit}} = \\ &= \begin{pmatrix} 0.823 & 0.549 & 0.005 + 0.147i \\ -0.365 + 0.093i & 0.540 + 0.062i & 0.750 \\ 0.418 + 0.080i & -0.632 + 0.053i & 0.645 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (19)$$

Однако, даже используя приближенно матрицу \mathbf{A}_1 (16) с нулевой диагональю в качестве матрицы \mathbf{A} в экспоненциальной параметризации $\mathbf{U}_1 = \exp \mathbf{A}_1$ и проводя факторизацию, получаем почти точно экспериментальные данные:

$$\begin{aligned} |\bar{\mathbf{U}}_1| &= |e^{\mathbf{A}_{Rot}} e^{\mathbf{A}_{CP_1}}| = \begin{pmatrix} 0.822 & 0.553 & 0.131 \\ 0.386 & 0.539 & 0.749 \\ 0.417 & 0.635 & 0.650 \end{pmatrix} \approx \\ &\approx |\mathbf{U}_{\text{best fit}}| = \begin{pmatrix} 0.823 & 0.549 & 0.147 \\ 0.374 & 0.546 & 0.750 \\ 0.428 & 0.633 & 0.645 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (20)$$

Для сравнения, вычисляя теперь (2) с $\delta = 0$, получаем следующие абсолютные значения для матрицы смешивания нейтрино:

$$|\mathbf{U}_{\delta=0}| = \begin{pmatrix} 0.823 & 0.549 & 0.147 \\ 0.455 & 0.480 & 0.750 \\ 0.341 & 0.684 & 0.645 \end{pmatrix}. \quad (21)$$

Простейший учёт CP -нарушения производится минимальным комплексным расширением с CP -

нарушающей фазой δ только в двух угловых элементах [11] матрицы $\mathbf{A} = \mathbf{A}_0$:

$$\mathbf{A}_0 = \begin{pmatrix} 0 & \lambda_1 & \lambda_3 e^{i\delta} \\ -\lambda_1 & 0 & \lambda_2 \\ -\lambda_3 e^{-i\delta} & -\lambda_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad (22)$$

где фаза δ , вообще говоря, не совпадает с δ из стандартной параметризации. Этот подход годится при слабом CP -нарушении [11] для кварков. В случае сильного CP -нарушения, как в нейтринном секторе, получаем численные значения для (22) в виде

$$\mathbf{A}_0 \cong \begin{pmatrix} 0 & 0.552 & 0.284e^{i150^\circ} \\ -0.552 & 0 & 0.834 \\ -0.284e^{-i150^\circ} & -0.834 & 0 \end{pmatrix}. \quad (23)$$

Значение CP -нарушающей фазы в такой экспоненциальной параметризации составляет $\delta \cong 150^\circ$; это соответствует $\delta_{CP} \cong 270^\circ$ в стандартной параметризации. Абсолютные значения элементов матрицы смешивания в этом приближении таковы:

$$|\mathbf{U}_0| = |\exp[\mathbf{A}_0]| = \begin{pmatrix} 0.824 & 0.555 & 0.112 \\ 0.366 & 0.543 & 0.755 \\ 0.431 & 0.630 & 0.646 \end{pmatrix}. \quad (24)$$

Отметим, что сравнение с экспериментальными данными за 2016 г. показывает хорошее согласие, кроме матричного элемента (1,3), который заметно больше в матрице

$$|\mathbf{U}_{\text{best fit}}| = \begin{pmatrix} 0.823 & 0.549 & 0.147 \\ 0.374 & 0.546 & 0.750 \\ 0.428 & 0.633 & 0.645 \end{pmatrix}. \quad (25)$$

Итак, мы продемонстрировали несколько экспоненциальных параметризаций матрицы смешивания нейтрино, которые обеспечивают хорошее и даже полное согласие с экспериментом с учётом реального большого CP -нарушения.

2. ДОПОЛНИТЕЛЬНОСТЬ СМЕШИВАНИЯ НЕЙТРИНО И КВАРКОВ

Для действительной матрицы \mathbf{A}_{Rot} с помощью представления вращения вокруг выделенной оси в трехмерном пространстве

$$\mathbf{P}_{\text{Rot}} = e^{\mathbf{A}_{\text{Rot}}} = e \begin{pmatrix} 0 & \lambda & \mu \\ -\lambda & 0 & \nu \\ -\mu & -\nu & 0 \end{pmatrix} = e \begin{pmatrix} 0 & -n_z & n_y \\ n_z & 0 & -n_x \\ -n_y & n_x & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{xx} & M_{xy} & M_{xz} \\ M_{yx} & M_{yy} & M_{yz} \\ M_{zx} & M_{zy} & M_{zz} \end{pmatrix}, \quad (26)$$

где по формуле Родригеса (см. [12]):

$$M_{ij} = (1 - \cos \Phi) n_i n_j + \delta_{ij} \cos \Phi - \varepsilon_{ijk} n_k \sin \Phi, \quad (27)$$

$i, j, k = x, y, z,$

где δ_{ij} — символ Кронекера и ε_{ijk} — символ Леви–Чивита, легко посчитать координаты вектора $\vec{n} = (\frac{\nu}{\Phi}, \frac{\mu}{\Phi}, -\frac{\lambda}{\Phi})$, а также угол поворота $\Phi = \pm \sqrt{\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2}$. В зависимости от набора экспериментальных данных для нейтрино, угол Φ и ось поворота \mathbf{n}_ν меняются. Так для трибимаксимальной параметризации (ТВМ)

$$\mathbf{n}_{\text{ТВМ}} = (0.7858, 0.2235, 0.5777), \quad \Phi_{\text{ТВМ}} \cong 56.6^\circ, \quad (28)$$

на основании данных PDG 2014 имеем

$$\mathbf{n}_{\nu 2014} = (0.7021, 0.3936, 0.5934), \quad \Phi_{\nu 2014} \cong 49.8^\circ, \quad (29)$$

и по данным на 2016 год [10] получаем

$$\mathbf{n}_{\nu 2016} = (0.8142, 0.1100, 0.5701), \quad \Phi_{\nu 2016} \cong 61.7^\circ. \quad (30)$$

Однако, по отношению к аналогичной оси вращения для кварков \mathbf{n}_q , для которых соответствующее оси вращения с учётом значений углов смешивания для кварков $\theta_{q12} = 13.04^\circ$, $\theta_{q23} = 2.38^\circ$, $\theta_{q13} = 0.201^\circ$ [7], составляет вектор

$$\mathbf{n}_q = (0.1829, 0.0206, 0.9831), \quad (31)$$

получаем, что угол между \mathbf{n}_q и \mathbf{n}_ν с высокой точностью равен $45^\circ (\pm 0.8^\circ)$. Этому эмпирическому факту, описанному выше с помощью экспоненциальной матрицы смешивания, соответствует гипотеза комплиментарности или дополнительности для нейтрино и кварков.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, с помощью Жордановой формы матрицы \mathbf{U} нами получена обратная матричная экспо-

нента, т.е. логарифм матрицы смешивания \mathbf{U} . Это позволило найти значение показателя \mathbf{A} матричной экспоненты для экспоненциальной параметризации $\mathbf{U} = \exp \mathbf{A}$ унитарной PMNS матрицы с CP -нарушением, точно воспроизводящее экспериментальные данные. Проведена факторизация матрицы смешивания, выделено действительное трехмерное вращение и соответствующее CP -нарушению мнимое вращение. Несмотря на значительный разброс экспериментальных данных, сравнение направления вектора действительного вращения \mathbf{n}_ν для нейтрино и \mathbf{n}_q для кварков в экспоненциальной параметризации даёт угол между ними во всех случаях $44.5^\circ - 45.8^\circ$, что подтверждает гипотезу их дополнительности. Учёт CP -нарушения с мнимой экспонентой \mathbf{A}_{CP1} даёт очень хорошее согласие с экспериментом. В отличие от предложенного ранее минимального комплексного расширения \mathbf{A}_0 с CP -фазой только в угловых элементах (1,3) и (3,1), новый анзац \mathbf{A}_{CP1} и соответствующая экспоненциальная матрица $\mathbf{U}_1 = \exp \mathbf{A}_1$ пригодны для расчетов с произвольным значением CP -нарушающей фазы; с учётом малого диагонального вклада:

$$\mathbf{A}_{CP1} + \mathbf{A}_{\text{diagIm}}, \quad \mathbf{A}_{\text{diagIm}} = i \text{diag} \{ \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \},$$

$$\alpha_2 = 0.0502214, \quad \alpha_1 \cong \alpha_3 \cong \alpha_2 / 2 \alpha_3,$$

получаем с помощью экспоненциальной матрицы смешивания $\mathbf{U} = \exp \mathbf{A}$ точное описание всех экспериментальных данных.

Благодарности

Авторы выражают признательность проф. А. В. Борисову за полезные обсуждения и предложенный алгоритм вычисления логарифма матрицы.

[1] Weinberg S., Phys. Rev. Lett. 1967. **19**. P. 1264.
 [2] Salam A.. Elementary Particle Theory, Ed. by N. Svartholm. Almqvist Forlag AB, 1968.

[3] Glashow S.L. Nucl. Phys. 1961. **22**. P. 579.
 [4] Понтекорво Б. ЖЭТФ. 1957. **33**. С. 549.
 [5] Понтекорво Б. УФН. 1968. **95**. С. 517.

- [6] *Maki Z., Nakagawa M., Sakata S.* Prog. Teor. Phys. 1962. **28**. P. 870
- [7] *Olive K. A. et al.* (Particle Data Group), Chin. Phys. C. 2014. **38**. 090001.
- [8] *Loring T. A.* Numerical Linear Algebra with Applications. 2014. **21**. P. 744.
- [9] *Gonzalez-Garcia M., Maltoni M., Schwetz T.* Updated fit to three neutrino mixing: status of leptonic CP violation, arXiv:1409.5439.
- [10] *Gonzalez-Garcia M., Maltoni M., Schwetz T.* <http://www.nu-fit.org>.
- [11] *Datolli G., Zhukovsky K. V.* Eur. Phys. J. C. 2008. **55**. P. 547.
- [12] *Goldstein H.* Classical Mechanics Cambridge, Addison-Wesley, 1950.
- [13] *Жуковский К.В., Даммоли Д.* ЯФ. 2008. **71**. С. 1838.
- [14] *Datolli G., Zhukovsky K. V.* Eur. Phys. J. C. 2008. **55**. P. 547.
- [15] *Zhukovsky K., Melazzini F.* Eur. Phys. J. C. 2016. **76**. P. 462.
- [16] *Жуковский К.В.* ЯФ. 2017. **80**, № 4. С. 379.

Account for the CP-violation in the exponential parameterization of neutrino mixing

K. Zhukovsky Faculty of Physics Lomonosov Moscow State University, Moscow 119991 Russia

E-mail: zhukovsk@physics.msu.ru.

The exponential parameterization of the neutrino mixing is studied; it allows distinguishing of pure rotational part of the mixing matrix and of the part, in charge of the CP-violation. The logarithm of the mixing matrix is computed. Based on the last experimental data on the neutrino mixing, the exact values of the parameters of the exponential neutrino mixing matrix are calculated. The real part, corresponding the real rotation in space, and the imaginary part, corresponding CP-violation and rotation around the axis with imaginary coordinates, are distinguished. Factorization of the mixing matrix is demonstrated in the form of two rotations around real and imaginary axes. The complementarity hypothesis is confirmed.

PACS: 14.60.Pq, 12.15.Ff, 11.30.Er, 02.20.-a.

Keywords: neutrino mixing, PMNS matrix, CP violation, exponential parameterization, group.

Received 20 June 2017.

Сведения об авторе

Жуковский Константин Владимирович — доктор физ.-мат. наук, вед. науч. сотрудник; тел.: (495) 939-31-77, e-mail: zhukovsk@physics.msu.ru.
