

Особенности распространения прямых и обратных волн в волноводах с анизотропным заполнением

А. Л. Делицын^{1,2*}

¹Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет, кафедра математики
Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2

²Главный научно-исследовательский испытательный центр
робототехники Министерства обороны Российской Федерации
Россия, 117997, Москва, ул. Профсоюзная, 84/32 ФГБУ "ГНИИЦ РТ"МО РФ
(Статья поступила 07.07.2017; Подписана в печать 10.07.2017)

При распространении электромагнитных волн в волноводах с анизотропным заполнением при определенных соотношениях коэффициентов анизотропии возможно преобразование прямых волн в обратные, для которых направление фазовой и групповой скоростей противоположны. Подобный эффект представляет значительный интерес при передаче сигналов по волноводам. Анализируется поведение дисперсионных кривых в зависимости от параметров анизотропии. Установлено, что множество точек возникновения обратных волн на плоскости квадрат частоты преломления – квадрат постоянной распространения образует эллипс.

PACS: 02.30.Jr

УДК: 517.95.

Ключевые слова: обратные волны, дисперсионные кривые, особые точки.

ВВЕДЕНИЕ

Обратные волны, характеризующиеся противоположным направлением фазовой и групповой скорости, были открыты в [1, 2]. Их исследованию было посвящено значительное количество работ, особенно в области теории упругости, где они первоначально и были обнаружены. Достаточно полно состояние вопроса для теории упругости отражено в монографии [11]. В электродинамике существование обратных волн было обнаружено для частично заполненных волноводов круглого сечения. В работе [12] проведено исследование области локализации возникновения обратных волн на плоскости частота–постоянная распространения, при этом точки возникновения обратных волн рассматриваются как функции параметра заполнения волновода — отношения диаметра диэлектрической вставки к диаметру металлической стенки. Трудности подобных исследований связаны со сложным видом дисперсионного уравнения, допускающего только численное решение. В настоящей работе рассмотрено распространение волн в волноводе с постоянным, но анизотропным заполнением. В подобных волноводах, с одной стороны, существуют обратные волны, с другой стороны, их математическое описание может осуществляться аналитическими методами, что позволяет провести достаточно полное исследование поведения дисперсионных кривых в зависимости от параметров анизотропии.

*E-mail: delitsyn@mail.ru

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим стационарную систему уравнений Максвелла

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = ik\mathbf{H} \quad \operatorname{rot}\mathbf{H} = -ik\epsilon\mathbf{E}, \quad (1)$$

$$\operatorname{div}\epsilon\mathbf{E} = 0 \quad \operatorname{div}\mathbf{H} = 0, \quad (2)$$

в которой сокращен временной множитель $e^{-i\omega t}$. Под k понимаем $k = \frac{\omega}{c}$. Считаем, что тензор диэлектрической проницаемости задается диагональной матрицей

$$\epsilon = \begin{pmatrix} \epsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_3 \end{pmatrix}$$

с постоянными коэффициентами. Считаем, что граница волновода идеально-проводящая:

$$\mathbf{E} \times \mathbf{n}|_{\partial Q} = 0, \quad \mathbf{Hn}|_{\partial Q} = 0,$$

Волновод представляет собой цилиндр

$$Q = \{(x, y) \in \Omega, z \in (-\infty, \infty)\}$$

квадратного сечения

$$\Omega = \{0 < x < 1, 0 < y < 1\}.$$

Наложим ограничения на параметры тензора диэлектрической проницаемости. Считаем, что $0 < \epsilon_1 < \epsilon_2$. Будем рассматривать изменение дисперсионных кривых в зависимости от параметра ϵ_3 . При различных значениях ϵ_3 дисперсионные кривые имеют качественно разный вид. Если $\epsilon_3 < \epsilon_1$ или $\epsilon_3 > \epsilon_2$, то дисперсионные кривые являются монотонными функциями и существуют только прямые волны. При значениях ϵ_3 , расположенных между ϵ_3

и ε_3 ($\varepsilon_1 < \varepsilon_3 < \varepsilon_2$), при определенных значениях частот появляются точки ветвления дисперсионной кривой, эти точки отвечают за появление обратных и комплексных волн. Под комплексными волнами подразумеваются волны с комплексным значением квадрата постоянной распространения, существующими в волноводе, несмотря на отсутствие мнимой части у диэлектрической проницаемости.

Рассмотрим моды волновода, т.е. решения вида $\mathbf{E} = \mathbf{E}(x, y)e^{i\gamma z}$, $\mathbf{H} = \mathbf{H}(x, y)e^{i\gamma z}$. Подставляя их в систему (1)–(2) и сокращая на $e^{i\gamma z}$, получим (следуя работам [11], [13]–[15]) относительно векторов (H_x, H_y, E_z) и (E_x, E_y, H_z) с целью рассматривать линейную задачу на собственные значения

$$\begin{pmatrix} 0 & ik & \frac{\partial}{\partial x} \\ -ik & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ -\frac{\partial}{\partial x} & -\frac{\partial}{\partial y} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_x \\ H_y \\ E_z \end{pmatrix} = i\gamma \begin{pmatrix} \varepsilon_1^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_1 E_x \\ \varepsilon_2 E_y \\ H_z \end{pmatrix}, \quad (3)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -ik & \frac{\partial}{\partial x} \\ ik & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ -\frac{\partial}{\partial x} & -\frac{\partial}{\partial y} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_1 E_x \\ \varepsilon_2 E_y \\ H_z \end{pmatrix} = -i\gamma \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_x \\ H_y \\ E_z \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Два оставшихся уравнения имеют вид

$$(\text{rot}\mathbf{E})_z = ikH_z, \quad (5)$$

$$(\text{rot}\mathbf{H})_z = -ik\varepsilon_3 E_z. \quad (6)$$

Разрешая систему уравнений относительно (H_x, H_y, E_z) , получим задачу

$$\mathbf{SA} = -\gamma^2 \mathbf{FA}, \quad (7)$$

где

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial^2}{\partial x^2} - k^2 \varepsilon_1 & -\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} & ik \frac{\partial}{\partial y} \varepsilon_2 \\ -\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} & -\frac{\partial^2}{\partial y^2} - k^2 \varepsilon_2 & -ik \frac{\partial}{\partial x} \varepsilon_1 \\ -ik \varepsilon_2 \frac{\partial}{\partial y} & ik \varepsilon_1 \frac{\partial}{\partial x} & -\varepsilon_1 \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \varepsilon_2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix}, \quad (8)$$

где вектор

$$\mathbf{A} = \{H_x, H_y, E_z\}$$

удовлетворяет дополнительному уравнению

$$(\text{rot}\mathbf{A})_z = -ik\varepsilon_3 H_z \quad (9)$$

и граничным условиям

$$\mathbf{Hn}|_{\partial Q} = 0, \quad E_z|_{\partial Q} = 0. \quad (10)$$

2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Будем искать собственный вектор задачи (7)–(10) вида

$$\mathbf{A} = \{H_x \sin \pi y \cos \pi x, H_y \cos \pi x \sin \pi y, E_z \sin \pi x \sin \pi y\}.$$

Мы ограничиваемся рассмотрением решения с подобной зависимостью от поперечных координат, учитывая, что подобное решение отражает характерные черты задачи

$$\mathbf{SA} = -\gamma^2 \mathbf{FA}. \quad (11)$$

При этом упрощаются детали поиска аналитического решения. Подставляя \mathbf{A} в уравнение (11) и исключая E_z , учитывая (9), приходим к задаче

$$\mathbf{MA}_\perp = -\gamma^2 \mathbf{A}_\perp \quad (12)$$

или

$$\begin{pmatrix} \pi^2(1 + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_3}) - k^2 \varepsilon_2 & \pi^2(1 - \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_3}) \\ \pi^2(1 - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_3}) & \pi^2(1 + \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_3}) - k^2 \varepsilon_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_x \\ H_y \end{pmatrix} = -\gamma^2 \begin{pmatrix} H_x \\ H_y \end{pmatrix}. \quad (13)$$

Элементы a_{ij} матрицы \mathbf{M} равны:

$$a_{11} = \pi^2(1 + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_3}) - k^2 \varepsilon_2, \quad a_{12} = \pi^2(1 - \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_3}),$$

$$a_{21} = \pi^2(1 - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_3}), \quad a_{22} = \pi^2(1 + \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_3}) - k^2 \varepsilon_1.$$

Собственные значения $\gamma_{1,2}^2(k)$ имеют вид

$$\gamma_{1,2}^2 = \frac{1}{2}(- (a_{11} + a_{22}) \pm \sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}a_{21}}).$$

Если $(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}a_{21} < 0$, то квадраты постоянных распространения становятся комплексными величинами.

Таким образом, возникновение комплексных волн происходит в точках выполнения условий

$$(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}a_{21} = 0. \quad (14)$$

3. РЕЗУЛЬТАТЫ

Вещественная часть дисперсионных кривых в этих точках соответствует прямой и обратной волнам. Для прямых волн квадрат постоянной распространения является возрастающей функцией квадрата частоты, для обратной — убывающей.

На рис. 1 показано поведение дисперсионных кривых, когда ε_3 меньше ε_1 . Дисперсионные кривые имеют

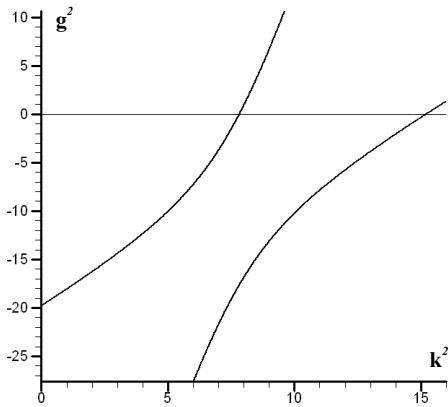


Рис. 1: Дисперсионные кривые при значении $\epsilon_3 < \epsilon_1$

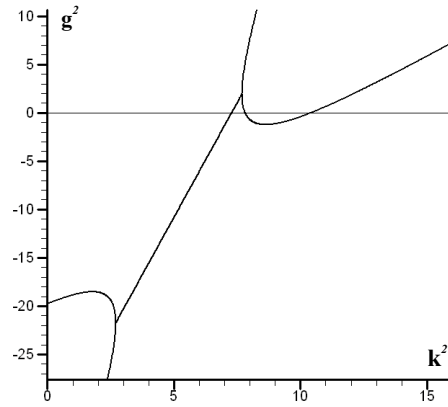


Рис. 2: Дисперсионные кривые, демонстрирующие поведение прямых и обратных волн при $\epsilon_1 < \epsilon_2 < \epsilon_3$

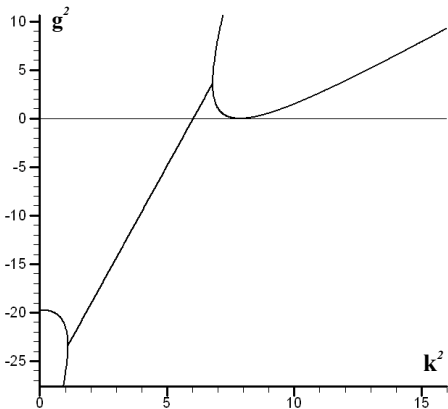


Рис. 3: Касание дисперсионной кривой с осью абсцисс

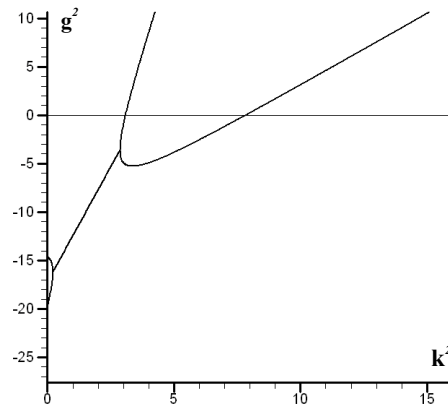


Рис. 4: Пересечение дисперсионной кривой с осью абсцисс

стандартный монотонный характер, качественно соответствуя кривым полого волновода. Для полого волновода дисперсионные кривые в переменных квадрат частоты — квадрат постоянной распространения являются прямыми. В случае наличия анизотропии происходит деформация этих кривых, однако монотонность сохраняется.

При увеличении параметра ϵ_3 происходит качественное изменение поведения дисперсионной кривой. Появляются участки убывания, а не роста дисперсионной кривой. Эти участки соответствуют существованию обратных волн. Типичное поведение дисперсионной кривой приведено на рис. 2.

При значениях ϵ_3 среднем гармоническим между ϵ_1 и ϵ_2 возникает явление касания дисперсионной кри-

вой оси абсцисс. Возбуждение волновода на этой резонансной частоте приводит к линейному росту поля, а не к нарастанию поля пропорционально \sqrt{t} как в точках пересечения дисперсионных кривых с осью абсцисс (см. рис. 3).

Дальнейшее увеличение параметра ϵ_3 приводит к восстановлению пересечения дисперсионной кривой оси абсцисс (см. рис. 4)

При значениях ϵ_3 больших ϵ_2 обратные волны пропадают (см. рис. 5).

На рис. 6 изображена общая картина дисперсионных кривых при изменении ϵ_3 от ϵ_1 до ϵ_2 .

Множество критических точек дисперсионных кривых, соответствующих различным значениям ϵ_3 , образует кривую, напоминающую эллипс. Докажем, что

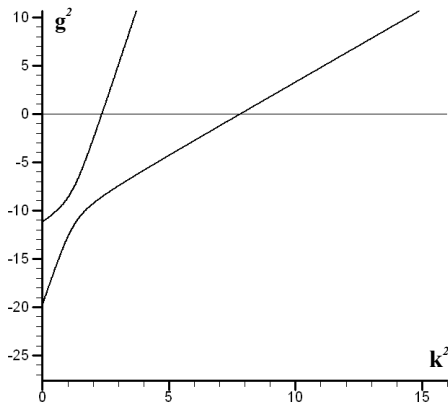


Рис. 5: Дисперсионная кривая, соответствующая $\epsilon_3 > \epsilon_2$

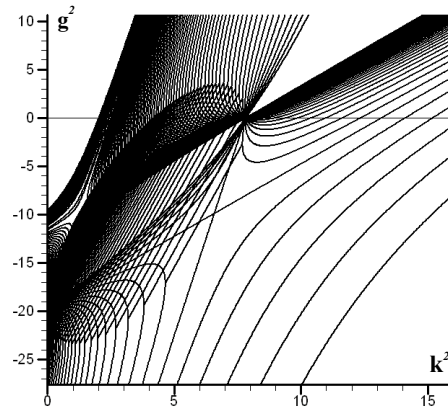


Рис. 6: Общий вид дисперсионных кривых, соответствующих различным значениям ϵ_3

эта кривая в самом деле является эллипсом.

Соответствующие значения (k^2, γ^2) определяются из уравнения (14) как

$$k^2 = \frac{\pi^2}{\epsilon_3} \pm \frac{2\pi^2 \sqrt{(\epsilon_3 - \epsilon_1)(\epsilon_2 - \epsilon_3)}}{(\epsilon_2 - \epsilon_1)\epsilon_3},$$

$$\gamma^2 = \frac{\epsilon_1 + \epsilon_2}{2} k^2 + \frac{\pi^2}{2} \frac{\epsilon_1 + \epsilon_2 + 2\epsilon_3}{2\epsilon_3}.$$

Множество точек (k^2, γ^2) описывает кривую при изменении ϵ_3 от ϵ_1 до v_2 на плоскости (k^2, γ^2) .

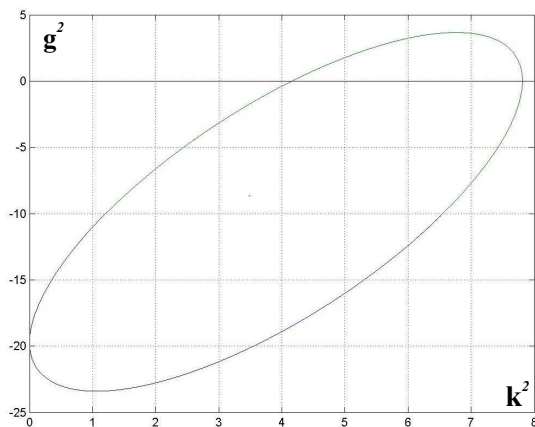


Рис. 7: Эллипс точек возникновения обратных и комплексных волн

Эта кривая является эллипсом. Для того, чтобы это доказать, достаточно сделать замену

$$\sin t = \frac{\sqrt{4\epsilon_1\epsilon_2}}{\epsilon_2 - \epsilon_1} \left(\sqrt{\epsilon_1\epsilon_2} \frac{1}{\epsilon_3} - \frac{\epsilon_1 + \epsilon_2}{2\sqrt{\epsilon_1\epsilon_2}} \right),$$

переходя от переменной ϵ_3 к переменной t , параметризующей кривую. После замены переменных и введения для упрощения записи констант $a_i, b_i, c_i, i = 1, 2$, вычисляемых по ϵ_1, ϵ_2 , кривая принимает вид:

$$k^2 = a_1 + b_1 \cos t + c_1 \sin t,$$

$$\gamma^2 = a_2 + b_2 \cos t + c_2 \sin t.$$

Таким образом, учитывая, что кривая $(k^2(t), \gamma^2(t))$ имеет характерную форму первой фигуры Лиссажу, убеждаемся что множество точек ветвления представляет собой эллипс (рис. 7).

Этот эллипс касается оси ординат при значении $\epsilon_3 = \frac{\epsilon_1 + \epsilon_2}{2}$ и имеет тангенс наклона большой оси к оси абсцисс, равный $\frac{\epsilon_1 + \epsilon_2}{2}$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрена область локализации критических точек дисперсионных кривых анизотропного волновода. Доказано, что множество особых точек образует эллипс. Установлено касание эллипса с осью ординат.

-
- [1] Tolstoy I, Usdin E. J. Acoust. Soc. Amer. 1957. **29**, N 1. P. 37.
- [2] Lamb H. Proc. Lond. Math. Soc. Ser. 2 1904. **1**, N 849. P. 473.
- [3] Веселов Г. И., Краснушкин П. Е. Докл. АН СССР. 1981. **260**, N 3. С. 576.
- [4] Claricoats P. J. B., Waldron R. A. J. Electron. Control. 1960. **8**, P. 455.
- [5] Claricoats P. J. B. Proc. IEEE 1963. N 110. P. 261.
- [6] Yener N. Journ. of Electromagnetic Waves and Applications 2004. **18**, P. 769.
- [7] Omar A. S., Schunemann K. F. IEEE Trans. MTT. 1987. **35**, P. 268.
- [8] Malakhov V. A., Raevskii A. S., Raevskii S. B. Tech. Phys. Lett. 2011. **37**. P. 83.
- [9] Ibanescu M., Johnson S. G., Roundy D., Luo C., Fink Y., Joannopoulos J. D. Phys. Rev. Lett. 2004. **92**. P. 063903.
- [10] Kocabas S. E., Veronis G, Miller D. A. B., Fan S. Phys. Rev. B. 2009. **79**. P. 035120.
- [11] Delitsyn A. L., Troshina I. K. J. Commun. Technol. EL. 2005. **50**. P. 815.
- [12] Веселов Г. И., Раевский С. Б. Слоистые металло-диэлектрические волноводы. М.: Радио и Связь, 1988.
- [13] Боголюбов А. Н., Делицын А. Л., Свешников А. Г. Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1999. **39**, N 11. С. 1869.
- [14] Боголюбов А. Н., Делицын А. Л., Свешников А. Г. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1998. **38**, N 11. С. 1891.
- [15] Делицын А. Л. Дифференц. уравнения. 2000. **36**, N 5. С. 629.
-

Direct and backward waves propagation in anisotropic filled waveguides

A. L. Delitsyn^{1,2}

¹Department of Mathematics, Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University, Moscow 119991, Russia

²The Main Research and Testing Robotics Center of the Ministry of Defense of Russia

Moscow 117997, Russia

E-mail: delitsyn@mail.ru

The effect of transformation of direct to backward waves in the waveguide with anisotropic filling is considered. The dependence of dispersion curves from anisotropic parameters is investigated. It is proved that the curve of special points is ellipse.

PACS: 02.30.Jr

Keywords: backward waves, dispersion curves, special points.

Received 07 July 2017.

Сведения об авторе Делицын Андрей Леонидович — доктор физ.-мат. наук, профессор; тел.: (495) 939-39-47, e-mail: delitsyn@mail.ru.
