

## Модифицированный гамильтонов алгоритм для дискретной редуцированной модели Власова-Дарвина.

Л. В. Бородачев\* А. А. Беляев†

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет, кафедра математики  
Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2

(Статья поступила 10.07.2017; Подписана в печать 10.07.2017)

Сформулирована редуцированная модель Власова–Дарвина в компактном гамильтоновом представлении. Построен дискретный (по методу макрочастиц) лагранжево–гамильтонов алгоритм. Разработан прикладной плазменный код, адаптированный к массовым ПК средней мощности. Проведена апробация численного алгоритма в рамках исследования параметрической неустойчивости магнитоактивной плазмы.

PACS: 52.65

УДК: 519.6:533.9.

Ключевые слова: модель Власова–Дарвина, PIC–метод, численный алгоритм, магнитоактивная плазма

### ВВЕДЕНИЕ

Как известно, множество эффектов, обусловленных коллективными взаимодействиями частиц в плазме, носят нерелятивистский и безызлучательный характер [1]. Это объясняет устойчивый интерес к физическим приложениям дискретного по методу крупных («макро») частиц безызлучательного (магнитоиндукционного, дарвинского) моделирования в области низкочастотных электромагнитных явлений плазмифизики [2].

Привлекательной особенностью дарвинского формализма является возможность достоверного описания ряда электромагнитных эффектов, связанных с законом Фарадея, в рамках незапаздывающих систем [3]. При этом отсутствие в системе коротковолновых полевых мод, связанных с эффектами излучения, обуславливает корректность сравнительно крупномасштабной дискретизации пространственно-временного континуума при построении численной модели. Вместе с тем формализму присуща достаточно сложная численная интерпретация, особенно в контексте неявных разностных схем, в частности, обусловленная необходимостью эллиптической переформулировки дарвинских полевых уравнений, исходно имеющих гиперболический тип, противоречащий аналитическому представлению систем с мгновенным дальнедействием [4]. Дополнительно необходимо учесть традиционно большие объемы вычислений в современных компьютерных экспериментах по методу макрочастиц, связанные с сохранением в модельной среде возможно большего значения основного плазменного параметра – так называемой, дебаевской плотности частиц, определяющей степень физической достоверности полученных численных результатов ( $n_D \gg 1$ , где на величину  $n_D$  существенно влияет размерность рассматриваемого фазового пространства) [5]. Таким образом, становится понятной сложившаяся ситуация, при которой

большая часть реально работающих магнитоиндукционных кодов адаптирована к большим программно-вычислительным платформам кластерного типа, имеющим сравнительно ограниченный круг пользователей [6]. В этой связи представляется важной формулировка дарвинского алгоритма, эффективного и при реализации на достаточно мощных РС, позволяющего существенно расширить возможности применения дарвинских кодов в исследованиях низкочастотной плазмифизики. Решение этой задачи видится на пути сокращения фазового пространства за счет его конфигурационной части, представления самосогласованного безызлучательного формализма в экономичном лагранжево-гамильтоновом виде, выборе численно экономичных атрибутов дискретной плазменной модели.

### 1. БЕЗЫЗЛУЧАТЕЛЬНЫЙ ДИСКРЕТНЫЙ ФОРМАЛИЗМ

Модель самосогласованной разреженной плазмы без излучения математически представляется системой, включающей кинетические уравнения Власова [7] для одночастичных функций распределения каждого сорта ( $\alpha$ ) частиц (с массой  $m_\alpha$  и зарядом  $q_\alpha$ ):

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{r}} + \frac{q_\alpha}{m_\alpha} (\mathbf{E} + \frac{1}{c} (\mathbf{v} \times \mathbf{B})) \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{v}} = 0, \quad (1)$$

и дарвинскую (низкочастотную) аппроксимацию [3] уравнений Максвелла для внутреннего электромагнитного ( $\mathbf{E}, \mathbf{B}$ ) поля:

$$\begin{aligned} \nabla \mathbf{E}_p &= 4\pi \rho, & \nabla \times \mathbf{E}_v &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ \nabla \mathbf{B} &= 0, & \nabla \times \mathbf{B} &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}_p}{\partial t}, \end{aligned} \quad (2)$$

активно использующее известное разложение Гельмгольца [8] для векторных полей (и токов):

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_p + \mathbf{a}_v : \quad \nabla \mathbf{a}_v = 0, \quad \nabla \times \mathbf{a}_p = 0.$$

\*E-mail: borodach2000@mail.ru

†E-mail: aa.beljaev@physics.msu.ru

Легко видеть, что единственное отличие дарвинского описание полей от максвелловского — отсутствие поперечной составляющей тока смещения. Вместе с тем, оставшаяся продольная компонента обеспечивает достоверность уравнения непрерывности:

$$\nabla \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = \nabla(\mathbf{J}_p + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathbf{E}_p}{\partial t}) = 0,$$

в чем легко убедиться, взяв rot от от обеих частей последнего уравнения системы (2). При этом плотности заряда и тока, как и в общем электромагнитном случае, выражаются через моменты функций распределения частиц:

$$\rho = \sum_{\alpha} q_{\alpha} \int f_{\alpha} d\mathbf{v}, \quad \mathbf{J} = \sum_{\alpha} q_{\alpha} \int \mathbf{v}_{\alpha} f_{\alpha} d\mathbf{v}.$$

Характерной особенностью модели является принципиальная нелинейность и сложное аналитическое представление, что обуславливает необходимость численного анализа в ее практическом приложении.

В настоящей работе для этих целей использована PIC (Particle-in-Cell) модификация метода макро-частиц [5], по сути являющегося дискретной аппроксимацией динамической части формализма. При этом уравнение Власова (1) замещается совокупностью уравнений движения конечного числа модельных (укрупненных) частиц:

$$\frac{d\mathbf{v}_j}{dt} = \frac{\mathbf{F}_j}{m_j}; \quad \frac{d\mathbf{r}_j}{dt} = \mathbf{v}_j, \quad j = 1, \dots, N,$$

с лоренцевой силой

$$\mathbf{F}_j \equiv \mathbf{F}(\mathbf{r}_j) = q_j \int [\mathbf{E}(\mathbf{r}) + \frac{1}{c}(\mathbf{v}_j \times \mathbf{B}(\mathbf{r}))] R(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j) d\mathbf{r},$$

где  $R(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j) : \int R(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j) d\mathbf{r} = 1$  — финитная функция (так называемый форм-фактор модели), описывающая макрочастицу.

Соответственно источники в полевых уравнениях (2) приобретают вид:

$$\rho = 4\pi \sum_j q_j R(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j); \quad \mathbf{J} = \frac{4\pi}{c} \sum_j q_j \mathbf{v}_j R(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j).$$

При этом дискретная самосогласованная система численно реализуется на пространственно-временной сетке  $\Omega_{\tau} \times \Omega_h$ .

## 2. ГАМИЛЬТОНОВО ПРЕДСТАВЛЕНИЕ

Здесь независимыми фазовыми переменными являются обобщенный импульс  $\mathbf{P}$  и обобщенная координата  $\mathbf{x}$ , за которую в практических реализациях обычно принимают пространственную координату  $\mathbf{r}$ . Вначале рассмотрим преобразование динамической части модели Власова–Дарвина.

### Динамическая часть

Лагранжиан заряженной частицы в классическом случае выражается через скалярный  $\varphi$  и векторный  $\mathbf{A}$  потенциалы поля как [9]

$$L = \frac{mv^2}{2} + \frac{q}{c} \mathbf{A} \cdot \mathbf{v} - q\varphi.$$

Ее обобщенный импульс имеет вид

$$\mathbf{P} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = m\mathbf{v} + \frac{q}{c} \mathbf{A}, \quad \text{то есть} \quad \mathbf{v} = \frac{1}{m} \left( \mathbf{P} - \frac{q}{c} \mathbf{A} \right).$$

Следовательно, гамильтониан частицы  $H = (\mathbf{v}, \mathbf{P}) - L$  [9] представляется следующим образом:

$$H = q\varphi + \frac{1}{2m} \left( \mathbf{P} - \frac{q}{c} \mathbf{A} \right)^2.$$

В результате система уравнений движения частицы сорта  $\alpha$  с зарядом  $q_{\alpha}$  и массой  $m_{\alpha}$  принимает гамильтонову форму

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{\partial H_{\alpha}}{\partial \mathbf{P}} = \frac{1}{m_{\alpha}} \left( \mathbf{P} - \frac{q_{\alpha}}{c} \mathbf{A} \right),$$

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = -\frac{\partial H_{\alpha}}{\partial \mathbf{x}} = -q_{\alpha} \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{x}} + \frac{q_{\alpha}}{c m_{\alpha}} \left[ \left( \mathbf{P} - \frac{q_{\alpha}}{c} \mathbf{A} \right) \left( \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{x}} \right) \right],$$

где  $(\partial \mathbf{A} / \partial \mathbf{x})$  — матрица Якоби (3x3):  $\{\partial A_m / \partial x_k\}$ ,  $A_m = A_x, A_y, A_z$ ,  $x_k = x, y, z$  [8].

Заметим попутно, что уравнения Власова в гамильтоновых переменных имеют вид

$$\frac{\partial f_{\alpha}}{\partial t} + \left( \frac{\partial H_{\alpha}}{\partial \mathbf{P}}, \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial \mathbf{x}} \right) - \left( \frac{\partial H_{\alpha}}{\partial \mathbf{x}}, \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial \mathbf{P}} \right) = 0, \quad \alpha = 1, \dots, K,$$

а плотности частиц и тока каждой из компонент плазмы выражаются как

$$\left. \begin{aligned} n_{\alpha}(\mathbf{r}, t) &= s \int f_{\alpha}(t, \mathbf{x}, \mathbf{P}) d\mathbf{P}, \\ \mathbf{J}_{\alpha}(\mathbf{r}, t) &= \frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha}} \int \left( \mathbf{P} - \frac{q_{\alpha}}{c} \mathbf{A} \right) f_{\alpha}(t, \mathbf{x}, \mathbf{P}) d\mathbf{P}. \end{aligned} \right\}$$

Как легко видеть, теперь в уравнениях Власова и в гамильтоновых уравнениях движения частиц фигурируют только градиент скалярного потенциала, векторный потенциал и его градиенты (матрица Якоби), которые вычисляются в текущих точках локализации частиц  $(\mathbf{x}_{\alpha}(t))$ .

**Полевая часть**

Для преобразования дарвинских уравнений поля используем связь скалярного и векторного потенциалов с напряженностями полей [9]:

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \varphi, \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A},$$

а также наложим в целях инвариантности дополнительное условие в виде кулоновской (поперечной) калибровки  $\nabla \mathbf{A} = 0$ .

Тогда, подставив выражения для электрического и магнитного полей в первое и последнее уравнения системы (2) и воспользовавшись известным соотношением:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \nabla \nabla \mathbf{A} - \Delta \mathbf{A}.$$

получим с учетом принятой калибровки полевое описание в терминах потенциалов:

$$\Delta \varphi = -4\pi \rho, \tag{3}$$

$$\Delta \mathbf{A} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{J} + \frac{1}{c} \nabla \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right). \tag{4}$$

При этом уравнение непрерывности приобретает вид

$$\nabla \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = \nabla \left( \mathbf{J}_p - \frac{1}{4\pi} \nabla \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) \right) = 0. \tag{5}$$

**3. ДИСКРЕТНАЯ РЕДУЦИРОВАННАЯ МОДЕЛЬ**

Отметим общие соглашения, принятые при построении модели и позволяющие реализовать алгоритм, легко адаптируемый к персональным компьютерам средней производительности.

1. Выберем ориентацию декартовой системы координат:  $\mathbf{e}_p = \mathbf{e}_x$ , которая позволяет получить экономичную  $1\frac{2}{2}$ -мерную  $(x, v_x, v_y, v_z)$  постановку. При этом пространственные производные будут иметь выражения  $\partial/\partial y = \partial/\partial z = 0$ ,  $\partial/\partial x = d/dx$  в любом дифференциальном операторе.
2. Для представления дискретной модели положим компактный гамильтонов формализм. При этом полевое описание приведем к эллиптической форму, соответствующему «незапаздывающему» характеру дарвинского приближения и формально предполагающему исключение временных производных.
3. Как известно, используемое в полевом описании разложение Гельмгольца неоднозначно, поэтому эту часть модели сформулируем в виде краевых задач для потенциалов на основе известной теоремы Ладыженской о существовании и единственности такого разложения [10]. При этом

продольные (потенциальные) и поперечные (вихревые) составляющие векторных величин в любой точке  $x \in [0 - L]$  определяются как

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_p + \mathbf{a}_v : \mathbf{a}_p = (a_x, 0, 0), \quad \mathbf{a}_v = (0, a_y, a_z) = \mathbf{a}_\perp.$$

4. В целях численной экономии будем использовать макрочастицы с достаточно простым фактором:

$$R(x - x_j) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta x}, & |x - x_j| \leq \frac{\Delta x}{2}, \\ 0, & |x - x_j| > \frac{\Delta x}{2}, \end{cases}$$

где  $x_j$  — координата центра «облака» с линейным размером, равным шагу пространственной сетки  $\Delta x = h$ .

Итак, в области  $\bar{D} = [0 - L]$  рассматривается движение  $N$  заряженных макрочастиц-облаков в присутствии внешних (*ext*) и внутренних электромагнитных полей:

$$E_x = \frac{d\varphi}{dx} + E_x^{ext}, \quad \mathbf{E}_\perp = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}_\perp}{\partial t},$$

$$B_x = 0, \quad \mathbf{B}_\perp = (\mathbf{e}_x \frac{d}{dx} \times \mathbf{A}_\perp) + \mathbf{B}_\perp^{ext}.$$

Отметим попутно, что в силу кулоновской калибровки  $A_x = \text{const}$ , которую обычно нормируют на ноль.

Тогда динамическая часть модели будет иметь вид (частицы для простоты считаем точечными;  $\mathbf{r} = (x, 0, 0)$ ):

$$\begin{cases} \frac{dx_j}{dt} = \frac{1}{m_j} \left( P_{x,j} - \frac{q}{c} A_x \right), & j = 1, \dots, N \\ \frac{d\mathbf{P}_j}{dt} = -q_j \frac{d\phi}{dx} + \frac{q_j}{cm_j} [(\mathbf{P}_j - \frac{q_j}{c} \mathbf{A}) \left( \frac{d}{dr} \mathbf{A} \right)] + \\ \quad + q_j E_x^{ext} + \frac{q_j}{cm_j} (\mathbf{P}_j - \frac{q_j}{c} \mathbf{A}) \times \mathbf{B}_\perp^{ext}. \end{cases}$$

Модифицируем полевое описание в соответствии с принятыми соглашениями.

Уравнение для скалярного потенциала уже имеет эллиптическую форму. Поэтому опираясь на теорему Ладыженской, получим задачу Неймана для  $\varphi(x, t)$  в области  $D$  с границей  $S = \{0; L\}$ :

$$\begin{cases} \frac{d^2 \varphi}{dx^2} = -4\pi \rho, & x \in D, \\ \frac{d\varphi}{dx} |_S = -E_{bx}, \end{cases} \tag{6}$$

где плотность заряда определяется выражением

$$\rho(x, t) = \sum_{\alpha=1}^K q_\alpha \int f_\alpha(t, x, \mathbf{P}) d\mathbf{P}, \quad \alpha = 1, \dots, K.$$

Для векторного потенциала введем функцию  $\phi(x, t) = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial t}$ , удовлетворяющую следующему

эллиптическому уравнению:

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = -\frac{1}{4\pi} \frac{d^2}{dx^2} \left( \frac{\partial\varphi}{\partial t} \right) = \frac{dJ_x}{dx}.$$

Последнее легко получить, продифференцировав уравнение Пуассона (3) с учетом уравнения непрерывности (5). При этом граничное условие для потенциала  $\phi$  определяется формальным дифференцированием по времени краевого условия в системе (6) для определения скалярного потенциала. В результате получаем следующую задачу Неймана в области  $D$  с границей  $S = \{0; L\}$ :

$$\begin{cases} \frac{d^2\phi}{dx^2} = \frac{dJ_x}{dx}, & x \in D. \\ \frac{d\phi}{dx}|_S = -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial E_{bx}}{\partial t}. \end{cases}$$

Подстановка функции  $\phi(x, t)$  в уравнение (4) дает эллиптическое уравнение относительно векторного потенциала

$$\frac{d^2\mathbf{A}}{dx^2} = -\frac{4\pi}{c} \left( \mathbf{J} - \frac{d\phi}{dx} \right), \quad (7)$$

где плотность тока определяется выражением

$$\begin{aligned} \mathbf{J}(x, t) &= \sum_{\alpha=1}^K \mathbf{J}_\alpha(x, t) = \sum_{\alpha=1}^K \frac{q_\alpha}{m_\alpha} n_\alpha(x, t) \langle \mathbf{P}_\alpha \rangle - \\ &\quad - \mathbf{A}(x, t) \sum_{\alpha=1}^K \frac{q_\alpha^2}{m_\alpha c} n_\alpha(x, t). \end{aligned}$$

Наконец подставляя полученное выражение плотности тока в уравнение (7), получаем следующую краевую задачу для нахождения векторного потенциала  $\mathbf{A}(x, t)$  в области  $D$  с границей  $S = \{0; L\}$ :

$$\begin{cases} \frac{d^2\mathbf{A}}{dx^2} - \mu\mathbf{A} = -\mathbf{F}, & x \in D, \\ A_x = \text{const}, \\ \mathbf{A}|_S = 0, \end{cases}$$

где коэффициент и правая часть имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \mu(x, t) &= \frac{4\pi}{c} \sum_{\alpha=1}^K \frac{q_\alpha^2}{m_\alpha} n_\alpha(x, t), \\ \mathbf{F}(x, t) &= \frac{4\pi}{c} \left( \sum_{\alpha=1}^K \frac{q_\alpha}{m_\alpha} n_\alpha(x, t) \langle \mathbf{P}_\alpha \rangle - \frac{d\phi(x, t)}{dx} \right). \end{aligned}$$

Завершая построение модели выпишем уравнение непрерывности и его каноническое следствие:

$$\frac{dJ_x}{dx} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0, \quad J_x - \frac{1}{4\pi} \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial\varphi}{\partial t} \right) = 0.$$

Последнее нам потребуется для интерпретации решения краевой задачи с векторным потенциалом.

#### 4. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ МОДЕЛИ

##### А. Решение полевых уравнений

В настоящей постановке задачи для  $\phi, \varphi$  являются одномерными уравнениями Пуассона с соответствующими граничными условиями и не представляют особого интереса, поскольку имеют давно апробированные методы разностного решения [5]. Стоит, по-видимому, коротко рассмотреть лишь задачу для векторного потенциала, решение которой представим в «расщепленной» форме:  $\mathbf{A} = A_x + \mathbf{A}_\perp$ .

В силу нормировки  $A_x = 0$ , уравнение для продольной компоненты имеет вид

$$-F_x \equiv -\frac{4\pi}{c} \left( J_x - \frac{\partial\Phi}{\partial x} \right) = 0,$$

которое с учетом выражения для внутреннего электрического поля и определения  $\Phi = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial\varphi}{\partial t}$  приобретает вид, соответствующий каноническому следствию из уравнения непрерывности:

$$J_x - \frac{1}{4\pi} \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial\varphi}{\partial t} \right) = J_x + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial E_x}{\partial t} = 0.$$

Заметим, что в силу независимого определения  $\rho$  и  $\mathbf{j}$  при численном решении уравнения на практике, как правило, возникает его невязка  $\theta(x, t)$ , позволяющая оценить корректность расчета. При этом в случае ее значительных величин (порядка невязки разностного аналога уравнения на точном решении) для повышения достоверности результатов компьютерного эксперимента требуется существенное увеличение числа используемых макрочастиц.

Уравнение для поперечной компоненты  $\mathbf{A}_\perp$ , записанное в операторном виде

$$L\mathbf{A}_\perp \equiv (\Delta - \mu)\mathbf{A}_\perp = -\mathbf{F}_\perp,$$

допускает прямое решение  $\mathbf{A}_\perp = -L^{-1}\mathbf{F}_\perp$ . При этом в пространственно-одномерной постановке исходное векторное уравнение распадается на два независимых скалярных с трехдиагональной матрицей, имеющих хорошо разработанную методику численного решения [5].

##### В. Решение уравнений движения

Воспользуемся «расщеплением» векторного уравнения движения на продольную и поперечную компоненты:

$$\begin{aligned} \frac{dP_x}{dt} &= -q \frac{d\varphi}{dx} + \frac{q}{cm} \left[ \left( \mathbf{P} - \frac{q}{c} \mathbf{A} \right) \left( \frac{d}{dx} \mathbf{A} \right) \right]_x + qE_x^{ext} = \\ &= q \left( -\frac{d\varphi}{dx} + E_x^{ext} \right) + \frac{q}{c} \left( \mathbf{v}_\perp \cdot \frac{d}{dx} \mathbf{A}_\perp \right) = \\ &= qE_x + \frac{q}{c} \left( \mathbf{v}_\perp \times \mathbf{B}_\perp \right) = \frac{dv_x}{dt}, \end{aligned}$$

где поперечная составляющая скорости  $\mathbf{v}_\perp = (v_y, v_z)$ :

$$\mathbf{v}_\perp = \frac{1}{m}(\mathbf{P}_\perp - \frac{q}{c}\mathbf{A}_\perp).$$

Аналогично, для поперечной компоненты импульса будем иметь:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{P}_\perp}{dt} &= \\ &= \frac{q}{cm}[(\mathbf{P} - \frac{q}{c}\mathbf{A})(\frac{d}{dt}\mathbf{A})]_\perp + \frac{q}{cm}[(\mathbf{P} - \frac{q}{c}\mathbf{A}) \times \mathbf{B}_\perp^{ext}]_\perp = \\ &= (\mathbf{e}_x v_x \times \mathbf{B}_\perp^{ext}) \end{aligned}$$

в силу  $\frac{d}{dt} = 0$ . При этом влияние самосогласованного поперечного поля на динамику частиц учтено в левой части уравнения.

Для разностного интегрирования уравнений движения применяется наиболее экономичная схема второго порядка точности Leap-Frog [5]: фазовые координаты  $(x, \mathbf{P}_\perp)$  определяются на «целых» временных слоях  $t^n$ , а продольная компонента канонического импульса  $P_x$  — на «полуцелых»  $t^{n+1/2}$ .

Отметим, что предложенный формализм является комбинированным. Уравнения для  $x, P_x$  — обычные, лагранжевы уравнения движения, что удобно, так как основные физические процессы происходят вдоль оси  $x$ . В то же время уравнения для  $\mathbf{P}_\perp$  имеют гамильтоново представление, весьма лаконичное и особенно эффективное для замкнутых систем в силу  $\mathbf{P}_\perp = \text{const}$ .

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Отметим ряд достоинств построенного лагранжево-гамильтонова алгоритма:

- наглядность проявления основных нелинейных эффектов моделируемого явления, связанных динамикой частиц;
- лаконичность и компактность алгоритма, в особенности для замкнутых систем, в силу  $\mathbf{P} = \text{const}$ ;
- возможность широкого использования, ввиду легкой адаптации для современных ПК общего назначения.

По поводу последнего пункта отметим, что разработанный алгоритм был успешно реализован в виде прикладного кода DARWIN4dpHL на обычном ПК (процессор Intel Core i5, операционная система WINDOWS 7, язык FORTRAN 90).

Программа была апробирована в численных исследованиях параметрической неустойчивости разреженной магнитоактивной плазмы в присутствии волны накачки с частотой в районе электронной верхнегибридной. Здесь были получены интересные результаты (в частности, стохастический нагрев плазменных компонент на поздней стадии нелинейного развития неустойчивости, идущего на фоне активных распадных процессов), которые докладывались на всероссийской школе-семинаре «Волны-2017».

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 16-01-00690 А).

[1] Кадомцев Б.Б. Коллективные явления в плазме. М.: Наука, 1976.  
 [2] Нильсон К., Льюис Г. Модели укрупненных частиц в безызлучательном пределе. В кн.: Управляемый термоядерный синтез. М.: Мир, 1980. С. 395.  
 [3] Darwin C. G. Dynamical Motions of Charged Particles. Phil. Mag. (1920) **39**, p. 537–551.  
 [4] Бородачев Л.В. Мат. Моделирование. 2005. **17**, № 9. С. 53.  
 [5] Hockney R. W., Eastwood J. W. Computer Simulation Using Particles. N.-Y.: McGraw-Hill, 1981.

[6] Бородачев Л.В., Коломиец Д.О. Комп. Исследования и Моделирование. 2015. **7**, №1. С. 61.  
 [7] Власов А.А. Теория многих частиц. М.-Л.: ГИТТЛ., 1950.  
 [8] Корн Г., Корн Н. Справочник по математике. М.: Наука, 1974.  
 [9] Ландау Л.Д., Лившиц Е.М. Теория поля. М.: Наука, 1973.  
 [10] Ладыженская О.А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1970.

**Modified Hamiltonian algorithm for discrete reduced Vlasov–Darwin model.****L. V. Borodachev<sup>a</sup>, A. A. Belyaev<sup>b</sup>**

<sup>1</sup>*Department of Mathematics, Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University. Moscow 119991, Russia*  
*E-mail: <sup>a</sup>borodach2000@mail.ru, <sup>b</sup>aa.beljaev@physics.msu.ru*

A reduced Vlasov–Darwin model is formulated in a compact Hamiltonian representation. A discrete (by the particles method) Lagrangian–Hamiltonian algorithm is constructed. An applied plasma code, adapted to mass PCs of an average performance was developed. Numerical algorithm was approbated during the research of the parametric instability of a magnetoactive plasma.

PACS: 52.65.

*Keywords:* Vlasov–Darwin model, PIC–method, numerical algorithm, magnetoactive plasma.

*Received 10 July 2017.*

**Сведения об авторах**

1. Бородачев Леонид Васильевич — доктор физ.-мат. наук, доцент; e-mail: borodach2000@mail.ru.
  2. Беляев Александр Алексеевич — магистр; e-mail: aa.beljaev@physics.msu.ru.
-