Об одном способе исследования сингулярно возмущённых дифференциальных уравнений

Е. Е. Букжалёв*

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет, кафедра математики
Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2

(Статья поступила 01.07.2017; Подписана в печать 03.07.2017)

Предложен итерационный подход к исследованию сингулярно возмущённых дифференциальных уравнений. С помощью этого подхода построена последовательность, сходящаяся (как в асимптотическом, так и в обычном смысле) к решению задачи Коши для сингулярно возмущённого слабо нелинейного дифференциального уравнения первого порядка с двумя малыми параметрами. Доказательство сходимости построенной последовательности основано на использовании теоремы Банаха о неподвижной точке сжимающего оператора, при этом оценка коэффициента сжатия оператора позволяет оценить скорость сходимости последовательности. Данная последовательность может быть использована для обоснования асимптотик, получаемых с помощью других асимптотических методов.

PACS: 02.30.Hq УДК: 517.928.4
Ключевые слова: сингулярные возмущения, теорема Банаха о неподвижной точке, метод асимптотических итераций, метод пограничных функций, метод регуляризации сингулярных возмущений.

ВВЕДЕНИЕ

В настоящей работе на примере задачи Коши для слабо нелинейного дифференциального уравнения первого порядка с двумя малыми параметрами ε_1 и ε_2 (см. (1)–(2)) иллюстрируется итерационный метод исследования сингулярно возмущённых уравнений. Данный метод позволяет построить последовательность $y_n(x;\varepsilon)$ (здесь и далее $\varepsilon := (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$), сходящуюся по норме пространства $C[0,X]$ при достаточно малых ε_1 и ε_2 к погранслойному решению (с экспоненциальным погранслоем вблизи начальной точки) указанной задачи. Построение и доказательство сходимости последовательности $y_n(x;\varepsilon)$ опираются на теорему Банаха о неподвижной точке сжимающего отображения полного метрического пространства (см. [1]). Поскольку при этом коэффициент сжатия k отображения оказывается величиной порядка $|\varepsilon| := \left(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2\right)^{1/2}$, так что отклонение $y_n(x;\varepsilon)$ от решения $y(x;\varepsilon)$ (под отклонением подразумевается отклонение по норме $C[0,X]$) составляет $O(|\varepsilon|^{n+1})$, то полученный результат носит также и асимптотический характер.

Заметим, что каждый следующий элемент последовательности $y_n(x;\varepsilon)$ есть результат действия некоторого оператора на предыдущий элемент. Элементы таких последовательностей часто называют итерациями, а сами последовательности — итерационными. В нашем случае каждая следующая итерация приближается к $y(x;\varepsilon)$ (по норме $C[0,X]$) в асимптотически большое (обратно пропорциональное ε) число раз. Поэтому предложенный алгоритм построения последовательности $y_n(x;\varepsilon)$ относится к методу асимптотических итераций (о методе асимптотических итераций см., например, [2]). Построенную итерационную последовательность $y_n(x;\varepsilon)$ будем называть также асимптотической итерационной (или просто асимптотической) последовательностью решения $y(x;\varepsilon)$ рассматриваемой задачи.

Благодаря сходимости к точному решению последовательность $y_n(x;\varepsilon)$ может быть использована для обоснования асимптотик, получаемых с помощью различных асимптотических методов, например, метода пограничных функций (см. [3, 4]) и метода регуляризации сингулярных возмущений (см. [5, 6]), возможность применения которых связана с выполнением условия (4) на коэффициент $a(x)$ из правой части исследуемого уравнения. Подчеркнём, что сходимость (при достаточно малых ε_1 и ε_2) асимптотической последовательности $y_n(x;\varepsilon)$ является принципиальным преимуществом метода асимптотических итераций по сравнению с указанными методами, которые позволяют построить хоть и асимптотический, но, вообще говоря, расходящийся (в том числе при сколь угодно малых ε_1 и ε_2) ряд.

Ещё одним преимуществом метода асимптотических итераций является возможность построения всех членов $y_n(x;\varepsilon)$ без повышения требований гладкости на функции $a(x)$, $b(x)$ и $g(y,x)$ (для построения всех $y_n(x;\varepsilon)$ достаточно выполнения условий (3), в то время как для определения всех членов асимптотики, получаемой как с помощью метода пограничных функций, так и с помощью метода регуляризации сингулярных возмущений, требуется бесконечная дифференцируемость $a(x)$, $b(x)$ и $g(y,x)$).

Отметим, что способ построения и доказательства сходимости последовательности $y_n(x;\varepsilon)$, предложенный в настоящей статье, имеет перспективу обобщения на более широкие классы сингулярно возмущённых уравнений. В то же время следует также сказать, что идея применения итерационного подхода к сингулярно возмущённым уравнениям сама по себе не но-

*E-mail: bukzhalev@mail.ru

ва. Например, в работах [7–9] предложен итерационный процесс приближённого решения задачи Коши для нормальной системы быстрых и медленных уравнений (соответственно с малым параметром при производной и без него). При этом основное упрощение, достигаемое за счёт использования итерационного метода, состоит в понижении на каждом шаге размерности исходной системы. Но в отличие от указанных работ в настоящей статье упрощение связано не с понижением порядка, а с автономизацией и линеаризацией исследуемого уравнения.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим следующую задачу Коши:

$$\varepsilon_1 y' = a(x)\, y + b(x) + \varepsilon_2\, g(y,x), \quad x \in (0,X]; \tag{1}$$

$$y(0;\varepsilon) = y^0, \tag{2}$$

где $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 \in \mathbb{R}$ — параметры возмущения, $X > 0$, $y^0 \in \mathbb{R}$,

$$a(x), b(x) \in C^1[0,X], \quad g(y,x) \in C^{1,0}(\mathbb{R}\times[0,X]). \tag{3}$$

Кроме того, будем считать, что

$$\forall x \in [0,X] \quad a(x) < 0. \tag{4}$$

Поставим вспомогательную задачу:

$$a(x)\,\bar{y} + b(x) = 0, \quad x \in [0,X]; \tag{5}$$

$$\frac{d\Pi}{d\xi} = a(0)\,\Pi, \quad \xi \in (0, X/\varepsilon]; \tag{6}$$

$$\Pi(0) = y^0 - \bar{y}(0). \tag{7}$$

Уравнение (5) представляет собой алгебраическое уравнение первой степени для $\bar{y}(x)$, а (6) — автономное однородное линейное дифференциальное уравнение для $\Pi(\xi)$. Решение задачи (5)–(7) имеет вид:

$$\begin{gathered}\bar{y}(x) = -b(x)/a(x),\\ \Pi(\xi) = \left[y^0 - \bar{y}(0)\right] e^{a(0)\,\xi} = \left[y^0 + b(0)/a(0)\right] e^{a(0)\,\xi}.\end{gathered} \tag{8}$$

Сделаем замену переменных задачи (1)–(2):

$$x = \varepsilon_1\,\xi, \quad y(x;\varepsilon) = \tilde{y}(\xi,x) + |\varepsilon|\, z(\xi;\varepsilon), \tag{9}$$

где

$$\begin{gathered}\tilde{y}(\xi,x) := \bar{y}(x) + \Pi(\xi),\\ \varepsilon := (\varepsilon_1,\varepsilon_2), \quad |\varepsilon| := \left(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2\right)^{1/2}.\end{gathered} \tag{10}$$

Из (8) и (10) видно, что при достаточно большом $\bar{C}$ для $\tilde{y}(\xi,\varepsilon_1\xi)$ при всех $\varepsilon_1 \in (0,+\infty)$ и $\xi \in [0, X/\varepsilon_1]$ справедливо: $|\tilde{y}(\xi,\varepsilon_1\xi)| \leqslant \bar{C}$.

Для новой функции $z(\xi;\varepsilon)$ получается следующая начальная задача:

$$\frac{dz}{d\xi} = a(\varepsilon_1\,\xi)\, z + f(z,\xi;\varepsilon), \quad \xi \in (0, X/\varepsilon_1]; \tag{11}$$

$$z(0;\varepsilon) = 0, \tag{12}$$

где

$$\begin{gathered}f(z,\xi;\varepsilon) := |\varepsilon|^{-1}\left\{[a(\varepsilon_1\,\xi) - a(0)]\,\times\right.\\ \left.\times\,\Pi(\xi) - \varepsilon_1\,\bar{y}'(\varepsilon_1\,\xi) + \varepsilon_2\, g(\tilde{y}(\xi,\,\varepsilon_1\,\xi) + |\varepsilon|\,z,\,\varepsilon_1\,\xi)\right\}.\end{gathered} \tag{13}$$

Преобразуем уравнение (11), добавив переменную x в качестве нового параметра:

$$\begin{gathered}\frac{dz}{d\xi} = a(x)\,z + [a(\varepsilon_1\,\xi) - a(x)]\,z + f(z,\xi;\varepsilon),\\ (\xi,x) \in (0, X/\varepsilon_1] \times [0,X].\end{gathered} \tag{14}$$

Задача (14), (12) равносильна интегральному уравнению

$$\begin{gathered}z(\xi;\varepsilon) = e^{a(x)\,\xi}\int_0^{\xi} e^{-a(x)\,\zeta}\left\{[a(\varepsilon_1\,\zeta) - a(x)]\,z(\zeta;\varepsilon) +\right.\\ \left. + f(z(\zeta;\varepsilon),\zeta;\varepsilon)\right\} d\zeta.\end{gathered} \tag{15}$$

Поскольку решение z уравнения (15) заведомо не зависит от x, на место последнего можно подставить любую функцию ξ и ε_1 со значениями на отрезке $[0,X]$. Тогда, полагая $x = \varepsilon_1\,\xi$, приходим к следующему уравнению для $z(\xi;\varepsilon)$:

$$\begin{gathered}z(\xi;\varepsilon) = e^{a(\varepsilon_1\,\xi)\xi}\int_0^{\xi} e^{-a(\varepsilon_1\,\xi)\,\zeta}\left\{[a(\varepsilon_1\,\zeta) - a(\varepsilon_1\,\xi)]\,z(\zeta;\varepsilon) +\right.\\ \left. + f(z(\zeta;\varepsilon),\zeta;\varepsilon)\right\} d\zeta =: \ hatA(\varepsilon)[z](\xi;\varepsilon),\end{gathered} \tag{16}$$

где при каждом фиксированном ε под областью определения оператора $\widehat{A}(\varepsilon)$ подразумевается пространство $C[0, X/\varepsilon_1]$. Таким образом,

$$\widehat{A}(\varepsilon) : C[0,X/\varepsilon_1] \to C[0,X/\varepsilon_1].$$

2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СУЩЕСТВОВАНИЯ РЕШЕНИЯ

Пусть $O(0,C_0;\varepsilon_1) := \left\{z \in C[0,X/\varepsilon_1] \mid \forall\xi \in [0,X/\varepsilon_1] \ \ z(\xi) \in [-C_0,+C_0]\right\}$ — замкнутая C_0-окрестность функции $z \equiv 0$ в пространстве $C[0,X/\varepsilon_1]$, $\Omega(\varepsilon_0) := \left\{\varepsilon \mid \varepsilon_1 > 0,\ |\varepsilon| < \varepsilon_0\right\}$.

Утверждение 1. *Существуют такие $\varepsilon_0 > 0$ и $C_0 \geqslant 0$, что при каждом $\varepsilon \in \Omega(\varepsilon_0)$ справедливо:*

$$\widehat{A}(C_0;\varepsilon) : O(0,C_0;\varepsilon_1) \to O(0,C_0;\varepsilon_1),$$

где $\widehat{A}(C_0;\varepsilon)$ — сужение оператора $\widehat{A}(\varepsilon)$ на $O(0,C_0;\varepsilon_1)$.

Доказательство. Зафиксируем произвольные $\varepsilon > 0$ и $C_0 \geqslant 0$, подействуем оператором $\widehat{A}(C_0;\varepsilon)$ на произвольную функцию $z(\xi) \in O(0, C_0; \varepsilon_1)$ и оценим получившийся результат:

$$\left|\widehat{A}(C_0;\varepsilon)[z](\xi)\right| \leqslant e^{-\varkappa\,\xi}\left\{C_0\int\limits_0^\xi e^{\varkappa\,\zeta}\,|a(\varepsilon_1\,\zeta)-a(\varepsilon_1\,\xi)|\,d\zeta+\int\limits_0^\xi e^{\varkappa\,\zeta}\,|f(z(\zeta;\varepsilon),\zeta;\varepsilon)|\,d\zeta\right\}, \tag{17}$$

где $\varkappa := -\max_{[0,X]} a(x)$. Подчеркнём, что в силу второй теоремы Вейерштрасса постоянная $\varkappa$ имеет положительный знак.

Для первого интеграла из (17) имеем:

$$\int\limits_0^\xi e^{\varkappa\,\zeta}\,|a(\varepsilon_1\,\zeta)-a(\varepsilon_1\,\xi)|\,d\zeta = \varepsilon_1\int\limits_0^\xi e^{\varkappa\,\zeta}\,\left|a'(\varepsilon_1\,[(1-\theta)\,\zeta+\theta\,\xi])\right|(\xi-\zeta)\,d\zeta \leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon_1\,\|a'(x)\|\int\limits_0^\xi e^{\varkappa\,\zeta}\,(\xi-\zeta)\,d\zeta = \varepsilon_1\,\tfrac{\alpha}{\varkappa^2}\left[e^{\varkappa\,\xi}-1-\varkappa\,\xi\right] \leqslant |\varepsilon|\,\beta\,e^{\varkappa\,\xi}, \tag{18}$$

где $\theta = \theta(\varepsilon_1\,\zeta,\,\varepsilon_1\,\xi) \in (0,1)$, $\|\cdot\|$ — норма пространства $C[0,X]$, $\alpha := \|a'(x)\|$, $\beta := \alpha/\varkappa^2$.

Для второго интеграла из (17) имеем (см. (13) и (8)):

$$\int\limits_0^\xi e^{\varkappa\,\zeta}\,|f(z(\zeta;\varepsilon),\zeta;\varepsilon)|\,d\zeta \leqslant \int\limits_0^\xi e^{\varkappa\,\zeta}\,|\varepsilon|^{-1}\left\{\varepsilon_1\left|[y^0-\bar{y}(0)]\,a'(\varepsilon_1\,\theta_0\,\zeta)\right|\zeta\,e^{a(0)\,\zeta}+\varepsilon_1\left|\bar{y}'(\varepsilon_1\,\zeta)\right|+\right.$$
$$\left.+\,\varepsilon_2\left|g(\tilde{y}(\zeta,\,\varepsilon_1\,\zeta),\,\varepsilon_1\,\zeta)\right|+\varepsilon_2\,|\varepsilon|\,\left|z(\zeta;\varepsilon)\right|\,\left|g_y(\tilde{y}(\zeta,\,\varepsilon_1\,\zeta)+|\varepsilon|\,\theta_1\,z(\zeta;\varepsilon),\,\varepsilon_1\,\zeta)\right|\right\}d\zeta \leqslant$$
$$\leqslant\left\{\tilde{C}\,\alpha\,|a(0)|^{-1}\max_{\eta>0}(\eta\,e^{-\eta})+\|\bar{y}'(x)\|+\|g(y,x)\|_0+C_0\,\varepsilon_2\,\|g_y(y,x)\|_{C_0|\varepsilon|}\right\}\int\limits_0^\xi e^{\varkappa\,\zeta}\,d\zeta \leqslant$$
$$\leqslant\left(C_0\,|\varepsilon|\,\tfrac{1}{\varkappa}\,\|g_y(y,x)\|_{C_0|\varepsilon|}+\gamma\right)e^{\varkappa\,\xi}, \tag{19}$$

где $\theta_i = \theta_i(\zeta;\varepsilon) \in (0,1)$, $\|\cdot\|_\delta$ — норма пространства $C([-\bar{C}-\delta,\,+\bar{C}+\delta]\times[0,X])$,

$$\tilde{C} := |y^0-\bar{y}(0)|, \gamma := e^{-1}\,\tilde{C}\,\beta+\tfrac{1}{\varkappa}\,\|\bar{y}'(x)\|+\tfrac{1}{\varkappa}\,\|g(y,x)\|_0.$$

Из (17), (18) и (19) видно, что если C_0 и ε удовлетворяют неравенствам:

$$0 \leqslant l(C_0,|\varepsilon|) := C_0\,|\varepsilon|\,\left(\beta+\tfrac{1}{\varkappa}\,\|g_y(y,x)\|_{C_0|\varepsilon|}\right)+\gamma \leqslant C_0, \tag{20}$$

то $\widehat{A}(C_0;\varepsilon)[z](\xi) \in O(0,C_0;\varepsilon_1)$.

Пусть C_0 — любое число из $(\gamma,+\infty)$. Тогда поскольку $l(C_0,t)$ есть неубывающая функция t и $0 \leqslant l(C_0,0) < C_0$, то, во-первых, уравнение $l(C_0,t) = C_0$ имеет не более одного корня $t = \varepsilon_0$, причём ε_0 заведомо больше нуля (в случае отсутствия корней считаем, что $\varepsilon_0 = +\infty$), и, во-вторых, неравенства (20) справедливы при всех $\varepsilon \in \Omega(\varepsilon_0)$. Утверждение доказано.

Замечание. Из определения ε_0 следует, что

$$\varepsilon_0 \leqslant \left(\beta+\tfrac{1}{\varkappa}\,\|g_y(y,x)\|_{C_0\varepsilon_0}\right)^{-1} \tag{21}$$

(неравенство (21) формально справедливо и при $\varepsilon_0 = +\infty$, так как уравнение $l(C_0,|\varepsilon|) = C_0$ не имеет корней лишь в случае $\beta = 0$, $\|g_y(y,x)\|_{+\infty} = 0$, то есть если $a(x) = \mathrm{const}$ на $[0,X]$, $g(y,x) = \tilde{g}(x)$ на $\mathbb{R}\times[0,X]$).

Пусть для каждого фиксированного положительного ε_1 и любых z_1 и z_2 из $C[0,X/\varepsilon_1]$ определено расстояние ρ_{ε_1} между z_1 и z_2:

$$\rho_{\varepsilon_1}(z_1,z_2) := \|z_2-z_1\|_{C[0,X/\varepsilon_1]} := \max_{\xi\in X(\varepsilon_1)}|z_2(\xi)-z_1(\xi)|, \tag{22}$$

где $X(\varepsilon_1) := [0,X/\varepsilon_1]$. Заметим, что $C[0,X/\varepsilon_1]$ и $O(0,C_0;\varepsilon_1)$ с так определённым ρ_{ε_1} представляют собой полные метрические пространства.

Утверждение 2. $\widehat{A}(C_0;\varepsilon)$ — *сжимающий оператор при каждом* $\varepsilon \in \Omega(\varepsilon_0)$.

Доказательство. Пусть ρ_{ε_1} — метрика (22) пространства $O(0,C_0;\varepsilon_1)$. Выберем две произвольные функции $z_1(\xi)$ и $z_2(\xi)$ из этого пространства и оценим расстояние между $\widehat{A}(C_0;\varepsilon)[z_1]$ и $\widehat{A}(C_0;\varepsilon)[z_2]$:

$$\rho_{\varepsilon_1}(\widehat{A}(C_0;\varepsilon)[z_1], \widehat{A}(C_0;\varepsilon)[z_2]) = \max_{\xi\in X(\varepsilon_1)} \left|\widehat{A}(C_0;\varepsilon)[z_2](\xi) - \widehat{A}(C_0;\varepsilon)[z_1](\xi)\right| \leqslant \max_{\xi\in X(\varepsilon_1)} \int_0^{\xi} e^{\varkappa(\zeta-\xi)} \times$$
$$\times \left\{\left|a(\varepsilon_1\zeta) - a(\varepsilon_1\xi)\right| + \varepsilon_2 \left|g_y(\tilde{y}(\zeta,\,\varepsilon_1\zeta) + |\varepsilon|\,[(1-\theta)\,z_1(\zeta) + \theta\,z_2(\zeta)],\,\varepsilon_1\zeta)\right|\right\} \times$$
$$\times \left|z_2(\zeta) - z_1(\zeta)\right| d\zeta \leqslant \rho_{\varepsilon_1}(z_1,z_2)\,|\varepsilon|\,\left(\beta + \tfrac{1}{\varkappa}\,\|g_y(y,x)\|_{C_0|\varepsilon|}\right) \qquad (23)$$

(ср. (18) и (19)), где $\theta = \theta(\zeta;\varepsilon) \in (0,1)$.

Из (23) и (21) вытекает, что при любом $\varepsilon \in \Omega(\varepsilon_0)$ для коэффициента сжатия $k(C_0;\varepsilon)$ оператора $\widehat{A}(C_0;\varepsilon)$ справедливо:

$$k(C_0;\varepsilon) \leqslant |\varepsilon|\,\left(\beta + \tfrac{1}{\varkappa}\,\|g_y(y,x)\|_{C_0|\varepsilon|}\right)$$
$$\leqslant |\varepsilon|\,\left(\beta + \tfrac{1}{\varkappa}\,\|g_y(y,x)\|_{C_0\varepsilon_0}\right) \leqslant |\varepsilon|/\varepsilon_0 < 1. \qquad (24)$$

Утверждение доказано.

Таким образом, к оператору $\widehat{A}(C_0;\varepsilon)$ применима теорема Банаха о неподвижной точке, в силу которой при каждом $\varepsilon \in \Omega(\varepsilon_0)$ существует единственное решение $z(\xi;\varepsilon)$ задачи (11)–(12) (равносильной интегральному уравнению (16)), принадлежащее $O(0,C_0;\varepsilon_1)$. Подчеркнём, что единственность решения $z(\xi;\varepsilon)$ (при всех $\varepsilon \in \mathbb{R}^2$), причём глобальная (то есть на множестве $[0,X/\varepsilon_1] \times \mathbb{R}$), вытекает непосредственно из условия (3) на функции $a(x)$, $b(x)$ и $g(y,x)$.

3. ОЦЕНКА СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ ИТЕРАЦИЙ

Свойство сжимаемости оператора $\widehat{A}(C_0;\varepsilon)$ также позволяет построить итерационную последовательность $z_n(\xi;\varepsilon)$, сходящуюся по норме пространства $C[0,X/\varepsilon_1]$ к точному решению $z(\xi;\varepsilon)$ задачи (11)–(12) при каждом $\varepsilon \in \Omega(\varepsilon_0)$:

$$\|z - z_n\|_{C[0,X/\varepsilon_1]} := \max_{\xi\in X(\varepsilon_1)} |z(\xi;\varepsilon) - z_n(\xi;\varepsilon)| \to 0,$$
$$n \to \infty$$

(заметим, что для всякого ε_0' из интервала $(0,\varepsilon_0)$ сходимость будет равномерной по ε на множестве $\Omega(\varepsilon_0')$).

Положим $z_0(\xi;\varepsilon) \equiv 0$. Поскольку $z(\xi;\varepsilon) \in O(0,C_0;\varepsilon_1)$, то при каждом $\varepsilon \in \Omega(\varepsilon_0)$

$$\|z(\xi;\varepsilon) - z_0(\xi;\varepsilon)\|_{C[0,X/\varepsilon_1]} = \|z(\xi;\varepsilon)\|_{C[0,X/\varepsilon_1]} \leqslant C_0. \qquad (25)$$

Далее, для любого натурального n положим

$$z_n(\xi;\varepsilon) := \widehat{A}(C_0;\varepsilon)[z_{n-1}](\xi;\varepsilon). \qquad (26)$$

Тогда, учитывая (24) и (25), для каждого $n \in \{0\}\cup\mathbb{N} =: \mathbb{N}_0$ и каждого $\varepsilon \in \Omega(\varepsilon_0)$ имеем:

$$\|z(\xi;\varepsilon) - z_n(\xi;\varepsilon)\|_{C[0,X/\varepsilon_1]} \leqslant$$
$$\leqslant k(C_0;\varepsilon)^n\,\|z(\xi;\varepsilon) - z_0(\xi;\varepsilon)\|_{C[0,X/\varepsilon_1]} \leqslant$$
$$\leqslant C_0\,(|\varepsilon|/\varepsilon_0)^n. \qquad (27)$$

Вернёмся к задаче (1)–(2). Из (9), (10) и (8) приходим к следующей итерационной последовательности для решения $y(x;\varepsilon)$ исходной задачи:

$$y_n(x;\varepsilon) := \tilde{y}(x/\varepsilon_1,x) + |\varepsilon|\,z_n(x/\varepsilon_1;\,\varepsilon) =$$
$$= \bar{y}(x) + [y^0 - \bar{y}(0)]\,e^{a(0)\,x/\varepsilon_1} + |\varepsilon|\,z_n(x/\varepsilon_1;\,\varepsilon). \qquad (28)$$

При $n \geqslant 1$ величина $y_n(x;\varepsilon)$ может быть выражена непосредственно через $y_{n-1}(x;\varepsilon)$:

$$y_n(x;\varepsilon) = \tilde{y}(x/\varepsilon_1,x) + |\varepsilon|\,\widehat{A}(C_0;\varepsilon)[z_{n-1}](x/\varepsilon_1;\,\varepsilon) =:$$
$$=: \widehat{B}(\varepsilon)[y_{n-1}](x;\varepsilon),$$

где

$$z_{n-1}(\xi;\varepsilon) = |\varepsilon|^{-1}\,[y_{n-1}(\varepsilon_1\xi;\,\varepsilon) - \tilde{y}(\xi,\,\varepsilon_1\xi)]$$

(см. (28) и (26)). Отметим, что оператор $\widehat{B}(\varepsilon)$ будет сжимающим при $\varepsilon \in \Omega(\varepsilon_0)$ (то есть при тех же ε, что и $\widehat{A}(C_0;\varepsilon)$), и что при данных ε для оператора $\widehat{B}(\varepsilon)$ будет справедливо:

$$\widehat{B}(\varepsilon) : O(\tilde{y},C_0;\varepsilon) \to O(\tilde{y},C_0;\varepsilon),$$

где $O(\tilde{y},C_0;\varepsilon) := \{y \in C[0,X] \mid \forall x \in [0,X]\ |y(x) - \tilde{y}(x/\varepsilon_1,x)| \leqslant |\varepsilon|\,C_0\}$ — замкнутая $|\varepsilon|\,C_0$-окрестность функции $\tilde{y}(x/\varepsilon_1,x)$ в пространстве $C[0,X]$.

Теорема. *Пусть выполнены условия* (3) *и* (4). *Тогда, во-первых, при любом* $\varepsilon = (\varepsilon_1,\varepsilon_2) \in \Omega(\varepsilon_0)$ *существует единственное решение* $y(x;\varepsilon)$ *задачи* (1)–(2) *и, во-вторых, при любых* $\varepsilon \in \Omega(\varepsilon_0)$ *и* $n \in \mathbb{N}_0$ *справедливо неравенство*

$$\|y(x;\varepsilon) - y_n(x;\varepsilon)\| \leqslant C_0\,|\varepsilon|\,(|\varepsilon|/\varepsilon_0)^n.$$

Доказательство. Поскольку существование и единственность решения $y(x;\varepsilon)$ задачи (1)–(2) являются непосредственными следствиями существования и единственности решения $z(\xi;\varepsilon)$ задачи (11)–(12), то нам остаётся только оценить точность, с которой $y_n(x;\varepsilon)$ приближает $y(x;\varepsilon)$. Для каждого $n \in \mathbb{N}_0$ и каждого $\varepsilon \in \Omega(\varepsilon_0)$ имеем (см. (28), (9) и (27)):

$$\|y(x;\varepsilon) - y_n(x;\varepsilon)\| =$$
$$= \|y(x;\varepsilon) - \tilde{y}(x/\varepsilon_1,x) - |\varepsilon|\,z_n(x/\varepsilon_1;\,\varepsilon)\| =$$
$$= |\varepsilon|\,\|z(x/\varepsilon_1;\,\varepsilon) - z_n(x/\varepsilon_1;\,\varepsilon)\| \leqslant C_0\,|\varepsilon|\,(|\varepsilon|/\varepsilon_0)^n.$$

Теорема доказана.

[1] *Тихонов А.Н., Васильева А.Б., Свешников А.Г.* Дифференциальные уравнения: Учеб.: Для вузов. Курс высшей математики и мат. физики. М., 1998.

[2] *Копачевский Н.Д., Смолич В.П.* Введение в асимптотические методы: Специальный курс лекций. Симферополь, 2009.

[3] *Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.* Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М., 1973.

[4] *Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.* Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений: Науч.-теор. пособие. Актуальные вопросы прикладной и вычислительной математики. М., 1990.

[5] *Ломов С.А.* Введение в общую теорию сингулярных возмущений. М., 1981.

[6] *Ломов С.А., Ломов И.С.* Основы математической теории пограничного слоя. М., 2011.

[7] *Боглаев Ю.П.* Докл. АН СССР. 1976. **227**, №. 5. С. 1009.

[8] *Боглаев Ю.П.* Докл. АН СССР. 1977. **228**, №. 6. С. 1241.

[9] *Боглаев Ю.П., Жданов А.В., Стельмах В.Г.* Дифференц. уравнения. 1978. **14**, №. 3. С. 395.

A method of the study of singularly perturbed differential equations

E. E. Bukzhalev

Department of Mathematics, Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University, Moscow 119991, Russia
E-mail: bukzhalev@mail.ru

We propose an iterative approach to singularly perturbed differential equations. With this approach we construct a sequence that converges (both in the asymptotic and in the usual sense) to the solution to the Cauchy problem for a singularly perturbed first-order weakly nonlinear differential equation with two small parameters. The proof of convergence of the sequence constructed is based on the Banach fixed-point theorem for a contraction mapping, and the estimate of the contraction coefficient allows one to estimate the rate of convergence of the sequence. This sequence can be used for justification of the asymptotics obtained by other asymptotic methods.

PACS: 02.30.Hq.
Keywords: singular perturbations, Banach fixed-point theorem, method of asymptotic iterations, method of boundary functions, method of regularization of singular perturbations.
Received 01 July 2017.

Сведения об авторе

Букжалёв Евгений Евгеньевич — канд. физ.-мат. наук, доцент; тел.: (495) 939-10-33, e-mail: bukzhalev@mail.ru.