

К теории движения шарика по вращающейся брахистохроне с учетом сил трения

С. О. Гладков,* С. Б. Богданова†

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет (МАИ)). Россия, 125993, Москва, Волоколамское шоссе, д.4
(Статья поступила 11.02.2017; Подписана в печать 07.03.2017)

Дан аналитический вывод динамических уравнений движения шарика, скатывающегося по вращающемуся с постоянной угловой скоростью ω одномерному желобу произвольной формы, время скатывания по которому минимально. Учтены силы сухого и вязкого трения. Из решения полученной системы нелинейных дифференциальных уравнений аналитически и численно найден класс пространственных траекторий на поверхности тела вращения, соответствующих искомой форме желоба.

PACS: 05.45.-a. УДК: 531.332.1

Ключевые слова: брахистохрона, частота вращения, силы сухого и вязкого трения, нелинейные уравнения динамики, сила реакции.

ВВЕДЕНИЕ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В этой работе мы продолжим тему исследования, намеченную нами в работах [1–3]. Речь идет о следующей задаче. Предположим, что имеется бесконечно тонкий и абсолютно гибкий шланг, по которому скатывается шарик. Диаметры шланга и шарика совпадают. Ставится задача найти его форму, чтобы скатываясь внутри него под действием конкуренций силы тяжести, центростремительной силы и силы сопротивления, время скатывания было минимальным. Это была бы типичная постановка задачи о брахистохроне [1], если бы желоб (гибкий шланг) был бы неподвижен в плоскости $x - y$. Мы будем решать эту же задачу, но в более сложном трехмерном случае, при условии, что желоб вращается с постоянной угловой скоростью ω , направленной вдоль оси вращения z . При этом траектория движения шарика становится двухмерной, в отличие от одномерной классической брахистохроны. Совершенно понятно, что скольжение шарика происходит вдоль поверхности этой фигуры вращения по вполне определенной двумерной траектории, форма которой будет диктоваться конкуренцией упомянутых выше трех сил. Наша задача будет заключаться именно в том, чтобы с помощью уравнений динамики криволинейного движения найти единственно возможную пространственную форму желоба при условии, чтобы время скатывания в поставленных условиях было минимальным, как и в случае классической брахистохроны. Понятно, что решение этой задачи в предельном случае, когда $\omega = 0$ должно будет привести к параметрическим уравнениям циклоиды. Геометрия сформулированной проблемы проиллюстрирована на рис. 1, где с помощью единичных ортогональных ортов $\tau_2, \tau_1, \mathbf{n}$ показан мгновенный подвижный базис, в котором мы и будем решать задачу.

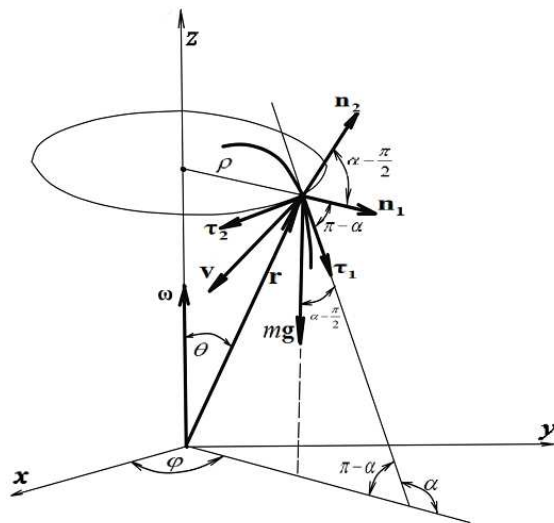


Рис. 1: Геометрия задачи. Обозначения см. в тексте

1. ВЫВОД УРАВНЕНИЙ ДИНАМИКИ С УЧЕТОМ СИЛ СОПРОТИВЛЕНИЯ

Как мы уже сказали, решение поставленной задачи весьма удобно привести в подвижном мгновенном базисе $\mathbf{n}, \tau_1, \tau_2$ правой системы координат, который элементарно раскладывается по неподвижным ортам $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ (также, как и в работах [1–3]) согласно преобразованиям

$$\begin{cases} \tau_2 = \mathbf{i} \cos \phi + \mathbf{j} \sin \phi, \\ \tau_1 = \mathbf{i} \cos \alpha \sin \phi - \mathbf{j} \cos \alpha \cos \phi + \mathbf{k} \sin \alpha, \\ \mathbf{n} = \mathbf{i} \sin \alpha \sin \phi - \mathbf{j} \sin \alpha \cos \phi - \mathbf{k} \cos \alpha, \end{cases} \quad (1)$$

где угол α представляет собой внешний угол между касательной и проекцией желоба на плоскость $x - y$, а угол ϕ есть полярный угол между осью x и проекцией желоба на плоскость $x - y$ (рис. 1). Представим метрику в цилиндрической системе координат для на-

*E-mail: sglad@newmail.ru

†E-mail: sonjaf@list.ru

шей задачи в виде

$$dl^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\phi^2 + dz^2. \quad (2)$$

Как видим, эта метрика записана в базисе $\boldsymbol{\tau}_2, \mathbf{n}_1, \mathbf{k}$, т. е.

$$d\mathbf{l} = d\rho \mathbf{n}_1 + \rho d\phi \boldsymbol{\tau}_2 + dz \mathbf{k}. \quad (3)$$

Для перехода в базис $\boldsymbol{\tau}_1, \boldsymbol{\tau}_2, \mathbf{n}$ мы должны найти соответствующее преобразование. В самом деле, поскольку

$$\mathbf{n}_1 = -\mathbf{i} \sin \phi + \mathbf{j} \cos \phi, \quad (4)$$

то с помощью (1) из (3) имеем

$$\begin{aligned} d\mathbf{l} = d\rho (-\mathbf{i} \sin \phi + \mathbf{j} \cos \phi) + \rho d\phi (\mathbf{i} \cos \phi + \mathbf{j} \sin \phi) + \\ + dz \mathbf{k} = (\rho \cos \phi d\phi - d\rho \sin \phi) \mathbf{i} + \\ + (\rho \sin \phi d\phi + d\rho \cos \phi) \mathbf{j} + dz \mathbf{k}. \end{aligned} \quad (5)$$

Для того, чтобы перейти теперь от базиса $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ в базис $\boldsymbol{\tau}_1, \boldsymbol{\tau}_2, \mathbf{n}$, необходимо совершить обратное преобразование в (1). Действительно, в силу того, что

$\det \hat{T} = 1$, где матрица преобразования (1) есть

$$\hat{T} = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ \cos \alpha \sin \phi & -\cos \alpha \cos \phi & \sin \alpha \\ \sin \alpha \sin \phi & -\sin \alpha \cos \phi & -\cos \alpha \end{pmatrix}, \quad (6)$$

легко получаем из нее обратную

$$\hat{T}^{-1} = \tilde{\hat{T}} = \begin{pmatrix} \cos \phi & \cos \alpha \sin \phi & \sin \alpha \sin \phi \\ \sin \phi & -\cos \alpha \cos \phi & -\sin \alpha \cos \phi \\ 0 & \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Поэтому, интересующее нас преобразование будет

$$\begin{cases} \mathbf{i} = \mathbf{n} \sin \alpha \sin \phi + \boldsymbol{\tau}_1 \cos \alpha \sin \phi + \boldsymbol{\tau}_2 \cos \phi, \\ \mathbf{j} = -\mathbf{n} \sin \alpha \cos \phi - \boldsymbol{\tau}_1 \cos \alpha \cos \phi + \boldsymbol{\tau}_2 \sin \phi, \\ \mathbf{k} = -\mathbf{n} \cos \alpha + \boldsymbol{\tau}_1 \sin \alpha. \end{cases} \quad (8)$$

В итоге из (5) получаем

$$\begin{aligned} d\mathbf{l} = (\rho \cos \phi d\phi - d\rho \sin \phi) \mathbf{i} + (\rho \sin \phi d\phi + d\rho \cos \phi) \mathbf{j} + dz \mathbf{k} = \\ = (\rho \cos \phi d\phi - d\rho \sin \phi) (\mathbf{n} \sin \alpha \sin \phi + \boldsymbol{\tau}_1 \cos \alpha \sin \phi + \boldsymbol{\tau}_2 \cos \phi) + \\ + (\rho \sin \phi d\phi + d\rho \cos \phi) (-\mathbf{n} \sin \alpha \cos \phi - \boldsymbol{\tau}_1 \cos \alpha \cos \phi + \boldsymbol{\tau}_2 \sin \phi) + dz (-\mathbf{n} \cos \alpha + \boldsymbol{\tau}_1 \sin \alpha) = \\ = \mathbf{n} \sin \alpha [-\cos \phi (\rho \sin \phi d\phi + d\rho \cos \phi) + \sin \phi (\rho \cos \phi d\phi - d\rho \sin \phi) - dz \operatorname{ctg} \alpha] + \\ + \boldsymbol{\tau}_1 \cos \alpha [-\cos \phi (\rho \sin \phi d\phi + d\rho \cos \phi) + \sin \phi (\rho \cos \phi d\phi - d\rho \sin \phi) + dz \operatorname{tg} \alpha] + \\ + \boldsymbol{\tau}_2 [\sin \phi (\rho \sin \phi d\phi + d\rho \cos \phi) + \cos \phi (\rho \cos \phi d\phi - d\rho \sin \phi)] = \\ = \mathbf{n} \sin \alpha (-d\rho - \operatorname{ctg} \alpha dz) - \boldsymbol{\tau}_1 \cos \alpha (d\rho - \operatorname{tg} \alpha dz) + \boldsymbol{\tau}_2 \rho d\phi. \end{aligned} \quad (9)$$

Следовательно, скорость в базисе $\boldsymbol{\tau}_1, \boldsymbol{\tau}_2, \mathbf{n}$ есть

$$\mathbf{v} = \mathbf{n} \sin \alpha (-\dot{\rho} - \dot{z} \operatorname{ctg} \alpha) - \boldsymbol{\tau}_1 \cos \alpha (\dot{\rho} - \dot{z} \operatorname{tg} \alpha) + \boldsymbol{\tau}_2 \rho \omega, \quad (10)$$

а ее квадрат, как легко проверить, будет

$$v^2 = \sin^2 \alpha (-\dot{\rho} - \dot{z} \operatorname{ctg} \alpha)^2 + \cos^2 \alpha (\dot{\rho} - \dot{z} \operatorname{tg} \alpha)^2 + \rho^2 \omega^2 = \dot{\rho}^2 + \dot{z}^2 + \rho^2 \omega^2. \quad (11)$$

Ничего удивительного в этом результате нет, поскольку модуль скорости в любом базисе и в $\boldsymbol{\tau}_1, \boldsymbol{\tau}_2, \mathbf{n}$, и в $\boldsymbol{\tau}_2, \mathbf{n}_1, \mathbf{k}$ должен быть одинаков. Дифференцируя теперь (10) по времени, находим общее выражение для полного ускорения шарика в новом базисе $\boldsymbol{\tau}_1, \boldsymbol{\tau}_2, \mathbf{n}$

$$\begin{aligned} \mathbf{a} = \dot{\mathbf{n}} \sin \alpha (-\dot{\rho} - \dot{z} \operatorname{ctg} \alpha) + \mathbf{n} \dot{\alpha} \cos \alpha (-\dot{\rho} - \dot{z} \operatorname{ctg} \alpha) + \mathbf{n} \sin \alpha \left(-\ddot{\rho} - \ddot{z} \operatorname{ctg} \alpha + \frac{\dot{z} \dot{\alpha}}{\sin^2 \alpha} \right) - \\ - \dot{\boldsymbol{\tau}}_1 \cos \alpha (\dot{\rho} - \dot{z} \operatorname{tg} \alpha) + \boldsymbol{\tau}_1 \dot{\alpha} \sin \alpha (\dot{\rho} - \dot{z} \operatorname{tg} \alpha) - \boldsymbol{\tau}_1 \cos \alpha \left(\ddot{\rho} - \ddot{z} \operatorname{tg} \alpha - \frac{\dot{z} \dot{\alpha}}{\cos^2 \alpha} \right) + \dot{\boldsymbol{\tau}}_2 \rho \omega + \boldsymbol{\tau}_2 \dot{\rho} \omega. \end{aligned}$$

Поскольку $\dot{\boldsymbol{\tau}}_2 = \omega \mathbf{n}_1$, $\dot{\mathbf{n}}_1 = -\omega \boldsymbol{\tau}_2$, $\dot{\mathbf{n}} = \omega [\mathbf{n}_1 \times \boldsymbol{\tau}_1] + \frac{v_1}{R} [\mathbf{n} \times \boldsymbol{\tau}_2] = \omega [\mathbf{n}_1 \times \boldsymbol{\tau}_1]$, а $\dot{\boldsymbol{\tau}}_1 = \frac{v_1}{R} \mathbf{n}$, где R — мгновенный радиус кривизны, то отсюда имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{a} = \omega [\mathbf{n}_1 \times \boldsymbol{\tau}_1] \sin \alpha (-\dot{\rho} - \dot{z} \operatorname{ctg} \alpha) + \mathbf{n} \dot{\alpha} \cos \alpha (-\dot{\rho} - \dot{z} \operatorname{ctg} \alpha) + \mathbf{n} \sin \alpha \left(-\ddot{\rho} - \ddot{z} \operatorname{ctg} \alpha + \frac{\dot{z} \dot{\alpha}}{\sin^2 \alpha} \right) - \\ - \frac{v_1}{R} \cos \alpha (\dot{\rho} - \dot{z} \operatorname{tg} \alpha) \mathbf{n} + \boldsymbol{\tau}_1 \dot{\alpha} \sin \alpha (\dot{\rho} - \dot{z} \operatorname{tg} \alpha) - \boldsymbol{\tau}_1 \cos \alpha \left(\ddot{\rho} - \ddot{z} \operatorname{tg} \alpha - \frac{\dot{z} \dot{\alpha}}{\cos^2 \alpha} \right) + \rho \omega^2 \mathbf{n}_1 + \boldsymbol{\tau}_2 \dot{\rho} \omega. \end{aligned} \quad (12)$$

Поэтому, согласно (12), полная сила, действующая на шарик, может быть найдена благодаря соотношению

$$\mathbf{F} = m \left[\omega [\mathbf{n}_1 \times \boldsymbol{\tau}_1] \sin \alpha (-\dot{\rho} - \dot{z} \operatorname{ctg} \alpha) - \mathbf{n} \dot{\alpha} \cos \alpha (\dot{\rho} + \dot{z} \operatorname{ctg} \alpha) + \mathbf{n} \sin \alpha \left(-\ddot{\rho} - \ddot{z} \operatorname{ctg} \alpha + \frac{\dot{z} \dot{\alpha}}{\sin^2 \alpha} \right) - \right. \\ \left. - \frac{v_1}{R} \cos \alpha (\dot{\rho} - \dot{z} \operatorname{tg} \alpha) \mathbf{n} + \boldsymbol{\tau}_1 \dot{\alpha} \sin \alpha (\dot{\rho} - \dot{z} \operatorname{tg} \alpha) - \boldsymbol{\tau}_1 \cos \alpha \left(\ddot{\rho} - \ddot{z} \operatorname{tg} \alpha - \frac{\dot{z} \dot{\alpha}}{\cos^2 \alpha} \right) + \rho \omega^2 \mathbf{n}_1 + \boldsymbol{\tau}_2 \dot{\rho} \omega \right] \quad (13)$$

Ее проекцию на нормаль к желобу \mathbf{n} определим, как скалярное произведение $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}$. Поэтому для силы реакции $N = F_n$ с учетом силы тяжести имеем из (13)

$$N = m \left(\omega^2 \rho \mathbf{n}_1 \mathbf{n} - \dot{\alpha} \cos \alpha (\dot{\rho} + \dot{z} \operatorname{ctg} \alpha) + \sin \alpha \left(-\ddot{\rho} - \ddot{z} \operatorname{ctg} \alpha + \frac{\dot{z} \dot{\alpha}}{\sin^2 \alpha} \right) - \right. \\ \left. - \frac{v_1}{R} \cos \alpha (\dot{\rho} - \dot{z} \operatorname{tg} \alpha) - g \cos \alpha \right).$$

А так как $\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}_1 = \sin \alpha$, получаем

$$N = m \left(\omega^2 \rho \sin \alpha - \dot{\alpha} \cos \alpha (\dot{\rho} + \dot{z} \operatorname{ctg} \alpha) + \sin \alpha \left(-\ddot{\rho} - \ddot{z} \operatorname{ctg} \alpha + \frac{\dot{z} \dot{\alpha}}{\sin^2 \alpha} \right) - \right. \\ \left. - \frac{v_1}{R} \cos \alpha (\dot{\rho} - \dot{z} \operatorname{tg} \alpha) - g \cos \alpha \right).$$

Поскольку же $v_1 = -R\dot{\alpha}$, то отсюда после простых преобразований найдем

$$N = m \left(\omega^2 \rho \sin \alpha - \dot{\alpha} \cos \alpha (\dot{\rho} + \dot{z} \operatorname{ctg} \alpha) + \sin \alpha \left(-\ddot{\rho} - \ddot{z} \operatorname{ctg} \alpha + \frac{\dot{z} \dot{\alpha}}{\sin^2 \alpha} \right) + \dot{\alpha} \cos \alpha (\dot{\rho} - \dot{z} \operatorname{tg} \alpha) - g \cos \alpha \right) = \\ = m \left(\omega^2 \rho \sin \alpha - g \cos \alpha - (\ddot{\rho} \sin \alpha + \ddot{z} \cos \alpha) \right). \quad (14)$$

Аналогично можно спроектировать (12) и на подвижные орты $\boldsymbol{\tau}_1$ и $\boldsymbol{\tau}_2$. Систему динамических уравнений движения согласно общему выражению (12) запишем, как

$$\mathbf{a} = \dot{\rho} \omega \boldsymbol{\tau}_2 + \mathbf{g} + \frac{\mathbf{F}_{fr}}{m}. \quad (15)$$

Проектируя уравнение (15) на ось $\boldsymbol{\tau}_1$ с помощью (12) и с учетом силы сопротивления получаем уравнение

$$-g \sin \alpha + \dot{\alpha} \sin \alpha (\dot{\rho} - \dot{z} \operatorname{tg} \alpha) - \cos \alpha \left(\ddot{\rho} - \ddot{z} \operatorname{tg} \alpha - \frac{\dot{z} \dot{\alpha}}{\cos^2 \alpha} \right) + \omega^2 \rho \cos \alpha + \frac{F_{fr}}{m} = \\ = -g \sin \alpha - \frac{d}{dt} (\dot{\rho} \cos \alpha - \dot{z} \sin \alpha) + \omega^2 \rho \cos \alpha + \frac{F_{fr}}{m} = 0, \quad (16)$$

где сила сопротивления

$$F_{fr} = k_1 v_1 + k_2 N. \quad (17)$$

Она выбрана в виде, пропорциональном скорости шарика с коэффициентом пропорциональности k_1 . Сухое трение описывается вторым слагаемым и характеризуется коэффициентом трения k_2 . Заметим также, что поскольку $\mathbf{F}_{fr} = -F_{fr} \boldsymbol{\tau}_1$, то в выражении (16) сила сопротивления идет со знаком «плюс». Находя далее проекцию уравнения (15) на ось $\boldsymbol{\tau}_2$, используя общее выражение (12), получаем

$$\omega \boldsymbol{\tau}_2 \cdot [\mathbf{n}_1 \times \boldsymbol{\tau}_1] \sin \alpha (-\dot{\rho} - \dot{z} \operatorname{ctg} \alpha) = 0 \quad (18)$$

Но, поскольку $\boldsymbol{\tau}_2 \cdot [\mathbf{n}_1 \times \boldsymbol{\tau}_1] \neq 0$, отсюда следует

условие

$$\dot{\rho} \sin \alpha + \dot{z} \cos \alpha = 0. \quad (19)$$

Параметрическое решение этого уравнения имеет единственно возможный вид

$$\dot{\rho} = -v_1 \cos \alpha, \dot{z} = v_1 \sin \alpha. \quad (20)$$

В результате находим, что

$$\ddot{\rho} \sin \alpha + \ddot{z} \cos \alpha = v_1 \dot{\alpha} = -\frac{v_1^2}{R}. \quad (21)$$

Следовательно, сила реакции согласно (14) определяется как

$$N = m \left(\omega^2 \rho \sin \alpha - g \cos \alpha + \frac{v_1^2}{R} \right). \quad (22)$$

А уравнение (16) в соответствии с (20) (поскольку $\dot{\rho} \cos \alpha - \dot{z} \sin \alpha = -v_1$) будет

$$\dot{v}_1 = g \sin \alpha - \omega^2 \rho \cos \alpha - \frac{F_{fr}}{m}. \quad (23)$$

Необходимым условием того, чтобы форма желоба представляла собой брахистохрону, как было доказано в [1], является условие равенства нулю силы реакции. Поэтому, если подставить (21) в (14) мы получим тождественно ноль, то есть уравнение параболы. Условием того, что траектория является брахистохроной означает, что в уравнении (21) надо выбрать знак «минус», то есть считать, что в соотношении $v_1 = -R\dot{\alpha}$ следует взять знак «плюс», а именно положить $v_1 = R\dot{\alpha}$. Надо сказать, что условие перехода от знака «минус» к знаку «плюс» перед $R\dot{\alpha}$ означает, что имеет место своеобразный качественный и количественный геометрический скачок, который приводит к раздвоению траектории на две разные части. Если $v_1 = -R\dot{\alpha}$, которое выполняется до какого-то момента времени $t \leq t_{cr}$, то движение будет происходить по параболе при условии $N = 0$. В момент времени $t = t_{cr}$ происходит «переключение» траектории с параболы на брахистохрону, и при $t > t_{cr}$ будет происходить движение по брахистохроне при условии $N \neq 0$. Подобная довольно любопытная физическая картина проявляется лишь в условиях чисто аналитического решения зада-

чи в рамках уравнений динамики, чего принципиально нельзя обнаружить при ее решении методами вариационного исчисления или теории оптимального управления. В свете вышесказанного также, как и в работе [1] следует положить, что

$$\frac{v_1^2}{R} = \omega^2 \rho \sin \alpha - g \cos \alpha. \quad (24)$$

Поэтому силу реакции для вращающейся брахистохроны можно вычислить согласно выражению

$$N = 2m (\omega^2 \rho \sin \alpha - g \cos \alpha), \quad (25)$$

Заметим, что угол α , как видно из рис. 1, изменяется в пределах от π до $\frac{\pi}{2}$. Правильнее, конечно, было бы писать модуль правой части выражения (22), так как сила реакции является величиной неотрицательной ($N \geq 0$), но поскольку, как мы только что отметили, косинус отрицателен, а синус положителен, то в этом нет необходимости.

Уравнения (20), (23)–(25) представляют собой полную систему искомым динамических уравнений движения с учетом сухой и вязкой сил сопротивления для вращающейся брахистохроны. Запишем эти уравнения с учетом тождества $v_1 = -R\dot{\alpha}$ в виде единой системы

$$\begin{cases} N = 2m (\omega^2 \rho \sin \alpha - g \cos \alpha), \\ \dot{v}_1 = g \sin \alpha - \omega^2 \rho \cos \alpha - \frac{F_{fr}}{m}, \\ v_1 \dot{\alpha} = -g \cos \alpha - \omega^2 \rho \sin \alpha, \end{cases} \quad \begin{cases} F_{fr} = k_1 v_1 + k_2 N, \\ \dot{\rho} = -v_1 \cos \alpha, \\ \dot{z} = v_1 \sin \alpha. \end{cases} \quad (26)$$

Как отсюда видно, в случае $\omega = 0$ система (26) переходит в уравнения работы [1].

2. ОТСУТСТВИЕ СОПРОТИВЛЕНИЯ

Проанализируем решение уравнений (26) в более простом случае, когда оба типа трения отсутствуют, то есть при условии $k_1 = k_2 = 0$. В результате имеем

$$\begin{cases} \dot{v}_1 = g \sin \alpha - \omega^2 \rho \cos \alpha, \\ v_1 \dot{\alpha} = -g \cos \alpha - \omega^2 \rho \sin \alpha, \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{\rho} = -v_1 \cos \alpha, \\ \dot{z} = v_1 \sin \alpha. \end{cases} \quad (27)$$

Вводя здесь безразмерные аргумент $\tau = \frac{gt}{v_0}$ и функции $y_1 = \frac{v_1}{v_0}$, $y_2 = \alpha$, $y_3 = \frac{\rho g}{v_0^2}$, $y_4 = \frac{zg}{v_0^2}$, получаем сле-

дующие также безразмерные уравнения

$$\begin{cases} y_1' = \sin y_2 - \lambda y_3 \cos y_2, \\ y_1 y_2' = -\cos y_2 - \lambda y_3 \sin y_2, \\ y_3' = -y_1 \cos y_2, \\ y_4' = y_1 \sin y_2, \end{cases} \quad (28)$$

где параметр $\lambda = \left(\frac{v_0 \omega}{g}\right)^2$, а «штрих» означает дифференцирование по безразмерному времени τ . Для их решения зададим следующие начальные условия $y_1(0) = 1$, $y_2(0) = \pi$, $y_3(0) = 0$, $y_4(0) = 0$. Численное решение уравнений (28) в зависимости от параметра λ проиллюстрировано на рис. 2, 3, где указаны его конкретные значения.

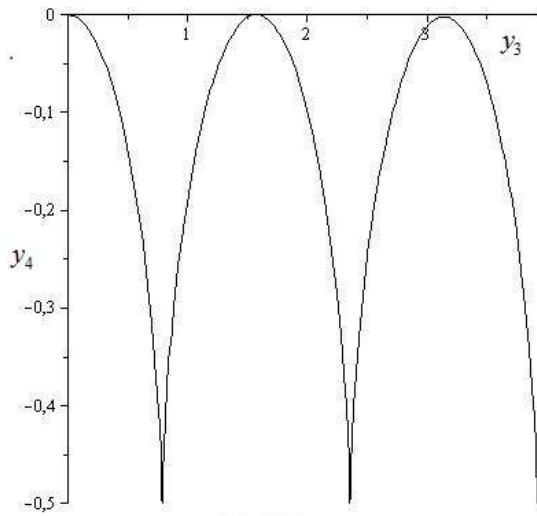


Рис. 2: Численное решение системы уравнений (31) в отсутствии вращения $\lambda = 0$ и в пренебрежении силами сопротивления $k_1 = k_2 = 0$ показано в виде зависимости $y_4(y_3)$. Как и должно быть, получилась классическая брахистохрона [1]

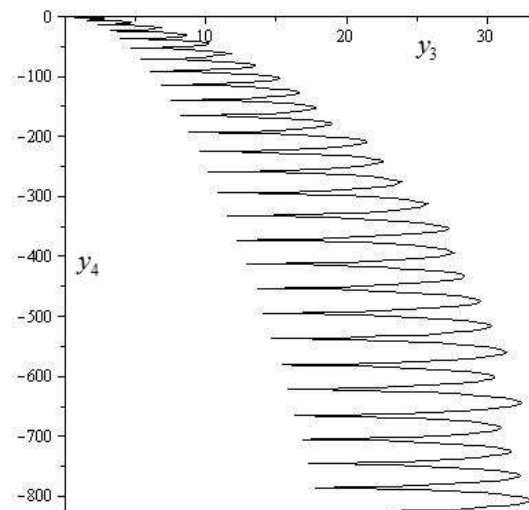


Рис. 3: Решение системы (31) при $k_1 = k_2 = 0$ и с учетом вращения для $\lambda = 5$ показано в виде зависимости $y_4(y_3)$. Как видно, форма брахистохроны при этом значительно изменяется

Что касается зависимостей $x(t), y(t), z(t)$, то их связь с параметрами v_1, ρ и α легко определяется с помощью обратного преобразования (8). Действительно, тогда получим, что

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v_{1x} = (\mathbf{v}_1 \mathbf{i}) = v_1 \cos \alpha \sin \phi, \\ \dot{y} &= v_{1y} = (\mathbf{v}_1 \mathbf{j}) = -v_1 \cos \alpha \cos \phi, \\ \dot{z} &= v_{1z} = (\mathbf{v}_1 \mathbf{k}) = v_1 \sin \alpha \end{aligned} \quad (29)$$

Положив здесь $\phi = \omega t$, после интегрирования найдем

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_0^t v_1(t) \cos \alpha(t) \sin \omega t dt, \\ y(t) &= - \int_0^t v_1(t) \cos \alpha(t) \cos \omega t dt, \\ z(t) &= \int_0^t v_1(t) \sin \alpha(t) dt. \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \dot{v}_1 = g \sin \alpha - \omega^2 \rho \cos \alpha - \frac{k_1}{m} v_1 - 2k_2 (\omega^2 \rho \sin \alpha - g \cos \alpha), \\ v_1 \dot{\alpha} = -g \cos \alpha - \omega^2 \rho \sin \alpha, \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{\rho} = -v_1 \cos \alpha, \\ \dot{z} = v_1 \sin \alpha. \end{cases} \quad (30)$$

Вводя здесь те же безразмерные функции, что и в случае системы (28), получаем

$$\begin{cases} y_1' = \sin y_2 - \lambda y_3 \cos y_2 - \mu y_1 - 2k_2 (\lambda y_3 \sin y_2 - \cos y_2), \\ y_1 y_2' = -\cos y_2 - \lambda y_3 \sin y_2, \end{cases} \quad \begin{cases} y_3' = -y_1 \cos y_2, \\ y_4' = y_1 \sin y_2, \end{cases} \quad (31)$$

где новый безразмерный коэффициент $\mu = \frac{k_1 v_0}{mg}$. Численное решение уравнений (31) при тех же начальных условиях приводит к весьма интересным зависимостям, проиллюстрированных на рис. 4, 5. Как из них видно, при учете вращения возможные формы желоба становятся довольно любопытными.

Как отсюда видно, в отсутствии вращения, то есть при $\omega = 0$, мы приходим к случаю классической плоской брахистохроны, который был рассмотрен нами в работе [1]. Их численное интегрирование позволяет найти проекции пространственной брахистохроны на плоскости $x - y, y - z, x - z$.

3. УЧЕТ ТРЕНИЯ

Рассмотрим теперь более сложную задачу, и учтем силы сопротивления. Согласно уравнениям (27) будем иметь

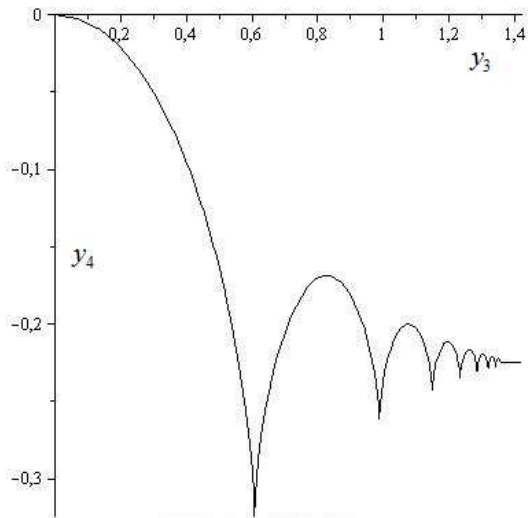


Рис. 4: Решение системы уравнений (31) в отсутствии вращения $\lambda = 0$, но при учете сил сопротивления, когда $\mu = 0.3$, а $k_2 = 0.01$

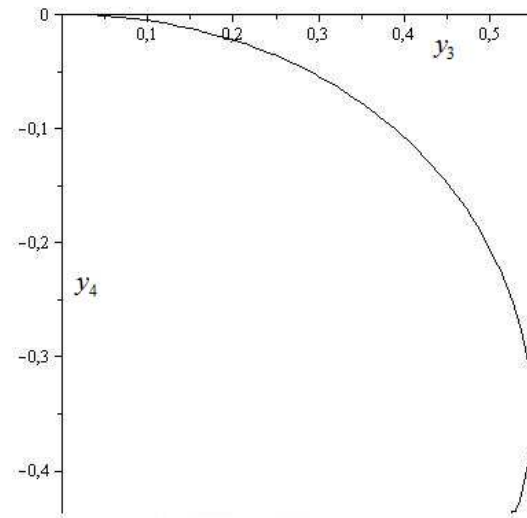


Рис. 5: Иллюстрация формы желоба в условиях вращения $y_4(y_3)$, когда $\lambda = 1$ и при учете сил сопротивления, когда $\mu = 0.01$, а коэффициент сухого трения $k_2 = 0.3$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В заключении работы отметим несколько ключевых моментов проведенного выше исследования.

1. Получены основные динамические уравнения движения для случая вращающейся брахистохроны с уче-

том действующих на движущийся шарик сил сухого и вязкого трения.

2. Проведено численное интегрирование найденных уравнений, как в случае отсутствия трения, так и при его учете, а полученные при этом решения проиллюстрированы на рис. 2–5.

- [1] Гладков С. О., Богданова С. Б. *Ученые записки* физического ф-та Московского Ун-та. 2016. № 1. 161101.
 [2] Гладков С. О. *Ученые записки* физического ф-та Московского Ун-та. 2016. № 4. 164002.

- [3] Гладков С. О., Богданова С. Б. *Ученые записки* физического ф-та Московского Ун-та. 2017. № 1. 171101.

To the question of analysis equations for moving due to the rotating of the plane brahistrohron

S. O. Gladkov^a, S. B. Bogdanova^b

Moscow Aviation Institution (National Research University) (MAI). Moscow 125993 Russia
 E-mail: ^asglad@newmail.ru, ^bsonjaf@list.ru.

An analytical conclusion of the dynamic equation for the ball moving on the rotating with the angle frequency ω two dimensional gutter arbitrary form is given. The both forces of the dry and viscosity friction was accounted. Due to solvation of equations system move analytically and numerical was founded of the class trajectories at neglect frictions forces.

PACS: 05.45.-a.

Keywords: brahistrohron, frequency of rotating, the forces of dry and viscosity frictions, nonlinear equations, the forth of gutter reaction.

Received 11 February 2017.

Сведения об авторах

1. Гладков Сергей Октябрьнович — доктор физ.-мат. наук, профессор; тел.: (499) -158-46-47, e-mail: sglad@newmail.ru.
 2. Богданова Софья Борисовна — канд. физ.-мат. наук, доцент; тел.: (499) 158-46-47, e-mail: sonjaf@list.ru.