

Уравнение Гарднера в слабодисперсионном пределе: эволюция импульса с полярностью, противоположной знаку квадратичной нелинейности

Е. А. Рувинская,* О. Е. Куркина,† А. А. Куркин,‡ А. Р. Гиниятуллин§

Нижегородский государственный технический университет имени Р. Е. Алексеева,
научно-исследовательская лаборатория «Моделирование природных и техногенных катастроф»
Россия, 603950, Нижний Новгород, ул. Минина, д. 24, к. 1

Проведено исследование некоторых особенностей слабодисперсионного предела для уравнения Гарднера с положительным и отрицательным знаком кубической нелинейности и положительным членом квадратичной нелинейности посредством численного моделирования эволюции длинного колоколообразного импульса с полярностью, противоположной знаку квадратичной нелинейности. Выполнен статистический и спектральный анализ полученных волновых полей.

PACS: 47.35.-i

УДК: 532.5

Ключевые слова: солитоны, бризеры, волна Эйри, спектр Фурье, вероятность превышения уровня.

Уравнение Гарднера является фундаментальной математической моделью, используемой во многих областях физики для описания слабонелинейных слабодисперсионных волн, когда необходимо учитывать влияние нелинейности более высокого порядка — кубической. При этом коэффициенты квадратичной и кубической нелинейности могут быть как положительными, так и отрицательными, в зависимости от контекста физической задачи [1–4].

Для исследования слабодисперсионного режима в рамках безразмерного уравнения Гарднера с положительным и отрицательным коэффициентом кубической нелинейности была проведена серия численных экспериментов по эволюции длинного колоколообразного импульса отрицательной полярности, у которого варьировалась амплитуда и ширина. Подобная начальная задача решалась в работе [5] для уравнения КдВ, а для уравнения Гарднера с различными знаками кубической нелинейности рассматривалось начальное условие в виде комбинации прямоугольных импульсов [6, 7].

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + 6\eta(1 \pm \eta) \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} = 0 \quad (1)$$

$$\eta(x, t = 0) = -a \operatorname{sech}^2 \left(\frac{x}{x_0} \right) \quad (2)$$

Для моделирования эволюции широкого колоколообразного импульса использовался численный код для интегрирования уравнения (1), основанный на неявном псевдо-спектральном методе [8], который позволяет сохранять интегралы, определенные формулами (в рамках численной задачи пределами интегрирова-

ния служат границы расчетной области):

$$M = \int_{-\infty}^{\infty} \eta dx, \quad E = \int_{-\infty}^{\infty} \eta^2 dx. \quad (3)$$

Начальное условие (2) дополняется периодическими граничными условиями. Используемый численный код неоднократно верифицировался при моделировании волновых процессов различной природы (см., например, [9, 10]).

Как известно [10], уравнение Гарднера с отрицательным коэффициентом кубической нелинейности обладает классическими солитонными решениями только положительной полярности, имеющими предельную амплитуду (ограничение сверху), равную одной безразмерной единице. Поэтому эволюция импульсов (2) отрицательной полярности (амплитуды которых варьировались от 0.1 до 3 безразмерных единиц, а ширины по уровню $(1/2)a$ были равны утроенным ширинам солитонов Гарднера положительной полярности соответствующей амплитуды (для $a > 1$ — предельной)) проходила по единому сценарию с образованием нелинейной волны Эйри (рис. 1). Спектр эволюционирующего волнового поля в этом случае имеет качественно такую же структуру, как и спектр волны Эйри, полученной в рамках слабодисперсионного предела для уравнения Кортевега-де Вриза при дезинтеграции импульса (2) ([11]) и в полулогарифмической шкале имеет асимптотику в виде прямой линии. Статистический анализ волнового поля (а именно, функция вероятности превышения уровня для каждого момента времени) позволяет сделать вывод об отсутствии механизмов образования волн экстремальной амплитуды, хотя взаимодействие генерируемых волн в редких случаях порождает несущественные «выбросы». С течением времени наблюдаемая высота волн становится значительно меньшей по сравнению с высотой первоначального импульса.

*E-mail: e.rouvinskaya@gmail.com

†E-mail: oksana.kurkina@mail.ru

‡E-mail: aakurkin@gmail.com

§E-mail: araratishe@gmail.com

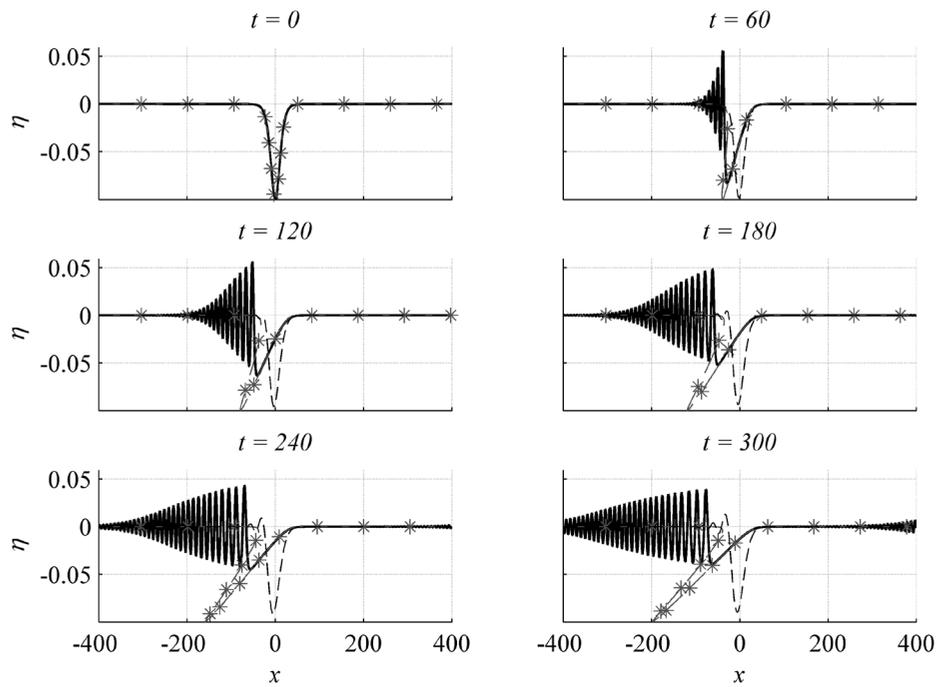


Рис. 1: Эволюция импульса (2) с амплитудой 0.1 и шириной, в три раза большей, чем у солитона Гарднера такой же амплитуды ($x_0 = 14$). Черная линия --- решение уравнения Гарднера с отрицательной кубической нелинейностью, пунктир --- линейное решение, пунктир со звездочками --- нелинейное решение

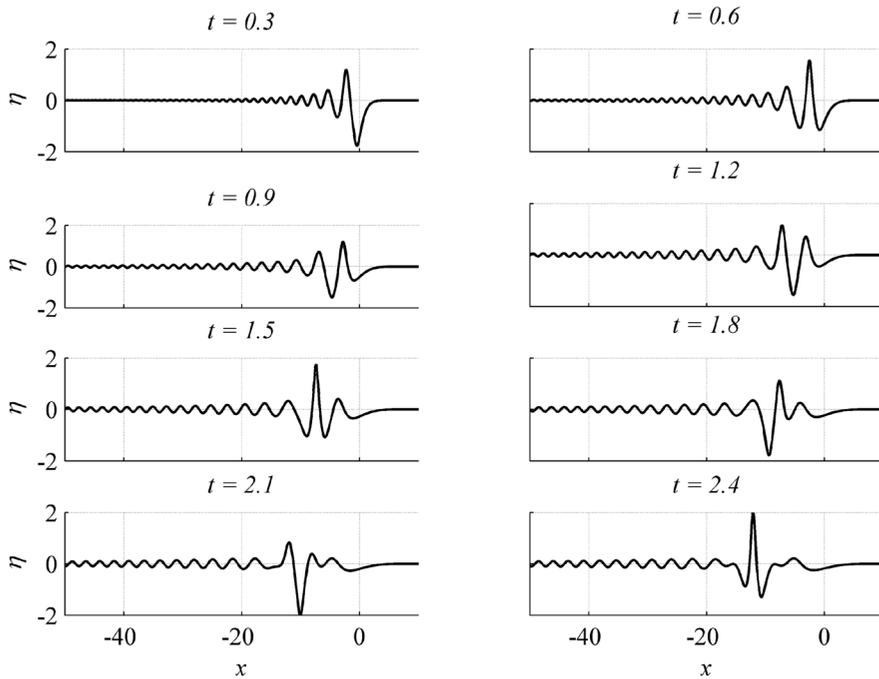


Рис. 2: Эволюция импульса (2) с амплитудой, равной трем безразмерным единицам, и шириной, равной ширине алгебраического солитона, в уравнении Гарднера с положительной кубической нелинейностью

Для уравнения Гарднера с положительным коэффициентом кубической нелинейности могут существовать

солитоны положительной полярности, бризеры (нелинейные осцилляторные волновые пакеты), а также со-

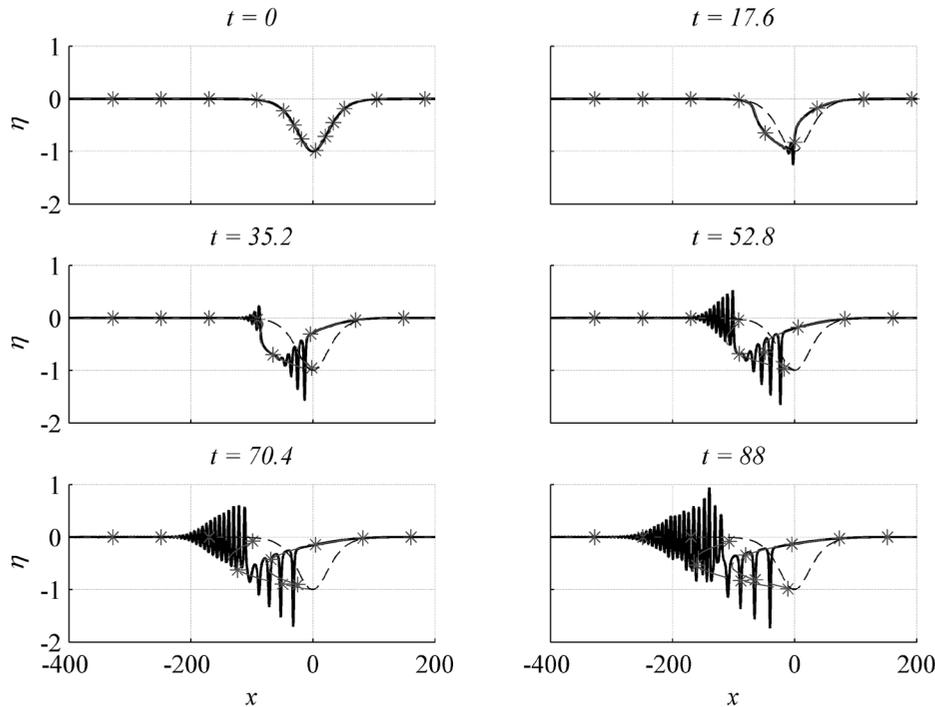


Рис. 3: Эволюция импульса (2) с амплитудой 1 и шириной, в три раза большей, чем у солитона Гарднера с амплитудой 0.9999. Черная линия — решение уравнения Гарднера с положительной кубической нелинейностью, пунктир — линейное решение, пунктир со звездочками — нелинейное решение

литоны отрицательной полярности, но с ограничением по амплитуде: она должна быть не менее двух безразмерных единиц (что равно амплитуде алгебраического солитона).

В этом случае амплитуды импульсов (2) выбирались равными одной, двум и трем безразмерным единицам (то есть меньше, равными и больше амплитуды алгебраического солитона), а ширины — одной ($x_0 = 0.46$), пяти ($x_0 = 2.33$) ширинам алгебраического солитона, либо трем ширинам гарднеровского платообразного солитона с амплитудой 0.9999 безразмерных единиц ($x_0 = 35$).

Для самой маленькой ширины при амплитуде, равной одной безразмерной единице, наблюдается образование нелинейной волны Эйри; при амплитуде, равной двум, — генерация бризера малой амплитуды с большой шириной огибающей на фоне дисперсионного волнового цуга, а при амплитуде, равной трем, — узкого бризера с амплитудой, почти совпадающей с высотой исходного начального возмущения (рис. 2). Генерация бризеров приводит к качественному изменению вида спектральных графиков — появлению «полочек» на плавно спадающей спектральной кривой.

При ширине, равной пяти ширинам алгебраического солитона, и амплитуде, равной единице, образуется бризер; при амплитуде, равной двум, — бризер и солитон; а при амплитуде, равной трем, — алгебраический солитон и два солитона, близ-

ких к семейству солитонов модифицированного уравнения Кортевега–де Вриза.

Наиболее интересная динамика наблюдается при эволюции самых широких из рассматриваемых импульсов, так как при всех выбранных амплитудах генерируются бризеры и солитоны отрицательной полярности, часть из которых находится на пьедестале, взаимодействующие в силу периодичности граничного условия (рис. 3). Во всех рассмотренных случаях появляются уединенные волны, амплитуды которых в два раза превышают высоту начального возмущения. При набегании солитонов на осцилляционный волновой пакет происходит кратковременное увеличение ее амплитуды, которое, однако не приводит к появлению существенных выбросов в волновом поле, как в случае взаимодействий солитонов разной полярности, генерируемых при эволюции длинной синусоидальной волны [4].

Таким образом, в настоящей работе для всех рассмотренных случаев проведен статистический анализ волнового поля: построена функция вероятности превышения уровня для каждого момента времени, проведено сравнение с известными статистическими законами распределения, проанализирована возможность возникновения волн экстремальной амплитуды. Также выполнен спектральный анализ решения, проанализирована эволюция спектра Фурье во времени.

Представленные результаты научно-исследовательской работы получены при поддержке стипендии президента РФ для молодых ученых и аспирантов на 2016–2018 гг. (СП-2311.2016.5).

-
- [1] Рувинская Е. А. Динамика нелинейных внутренних гравитационных волн в трехслойной жидкости. Дисс. канд. физ.-мат. наук: 01.02.05. Нижний Новгород, 2012.
- [2] Рувинская Е. А. и др. Динамика нелинейных внутренних гравитационных волн в слоистых жидкостях. Н. Новгород: НГТУ им. П. Е. Алексеева, 2014.
- [3] Kurkina O. E. et al. *Physics of Fluids*. **23**, N 11. P. 116602. (2011).
- [4] Kurkina O. E. et al. *Physica D: Nonlinear Phenomena*. (2015). doi:10.1016/j.physd.2015.12.007.
- [5] Trillo S. et al. *Physica D: Nonlinear Phenomena*. (2016). doi: 10.1016/j.physd.2016.01.007.
- [6] Grimshaw R. et al. *Chaos*. **12**, N 4. P. 1070. (2002).
- [7] Grimshaw R. et al. *Chaos*. **20**, N 4. P. 013102. (2010).
- [8] Fornberg B. A. *Practical Guide to Pseudospectral Methods*. Cambridge University Press, 1998.
- [9] Куркин А. А., Полухина О. Е. Известия Академии инженерных наук РФ. Прикладная математика и механика. **4**. С. 99. (2003).
- [10] Pelinovsky E. et al. *Solitary Waves in Fluids*. Chapter 4. Boston: WIT Press, Southampton, 2007.
- [11] Grava T., Klein C. *Physica D*. (2016). doi:10.1016/j.physd.2012.04.001.

The Gardner equation in weakly dispersive limit: evolution of a pulse with a polarity, opposite to the sign of the quadratic nonlinearity

E. A. Rouvinskaya^a, O. E. Kurkina^b, A. A. Kurkin^c, A. R. Giniyatullin^d

*Laboratory of Modeling of Natural and Anthropogenic Disasters,
Nizhny Novgorod State Technical University n. a. R. E. Alekseev
24 Minin street, 603950 Nizhny Novgorod, Russia*

E-mail: ^ae.rouvinskaya@gmail.com, ^boksana.kurkina@mail.ru, ^caakurkin@gmail.com, ^dararatishe@gmail.com

We study some peculiarities of the small dispersion limit for the Gardner equation with positive and negative sign of cubic nonlinear term and positive quadratic nonlinear term by numerical modeling of evolution of long bell-shaped pulse with a polarity, opposite to the sign of the quadratic nonlinearity. A statistical and spectral analysis of wave fields is carried out.

PACS: 47.35.-i

Keywords: solitons, breathers, Airy wave, the Fourier spectrum, exceedance probability distribution.

Сведения об авторах

1. Рувинская Екатерина Александровна — канд. физ.-мат. наук, мл. науч. сотрудник; тел.: (831) 436-63-93, e-mail: e.rouvinskaya@gmail.com.
2. Куркина Оксана Евгеньевна — канд. физ.-мат. наук, ст. науч. сотрудник, доцент; тел.: (831) 436-63-93, e-mail: oksana.kurkina@mail.ru.
3. Куркин Андрей Александрович — доктор физ.-мат. наук, науч. руководитель НИЛ Моделирования природных и техногенных катастроф, профессор; тел.: (831) 436-63-93, e-mail: aakurkin@gmail.com.
4. Гиниятуллин Айрат Рафаэлевич — канд. физ.-мат. наук, мл. науч. сотрудник; тел.: (831) 436-63-93, e-mail: araratishe@gmail.com.