

О преобразовании когерентного излучения фрактальными структурамиП. В. Короленко^{1,2,*}, А. А. Красулин^{1,†}, А. Ю. Мишин^{1,‡}, Р. Т. Кубанов^{1,*}¹Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
физический факультет, кафедра оптики, спектроскопии и физики наносистем
Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2²Физический институт имени П. Н. Лебедева Российской академии наук
Россия, 119991, ГСП-1, Москва, Ленинский проспект, д. 53

Проанализированы возможности и особенности использования некоторых методов расчета скейлинговых характеристик излучения при его взаимодействии с объектами, обладающими явными и скрытыми фрактальными признаками. Приведены данные о взаимосвязи скейлинговых параметров объектов и зондирующих пучков.

PACS: 42.25.Fx; 42.30.Kq; 61.43.Nv; 61.46.-w

УДК: 535.015

Ключевые слова: фрактал, фрактальная размерность, многослойные системы, дифракция.

Важным разделом современной когерентной оптики является раздел, в рамках которого рассматривается взаимодействие излучения с фрактальными или фракталоподобными объектами. Данная работа посвящена вопросу, касающемуся выбора оптимальных физико-математические моделей для расчета скейлинговых характеристик физического объекта и светового поля зондирующих когерентных пучков. Несмотря на значительное количество исследований, выполненных по данной теме (например, [1–3]), и большое число приемов оценки фрактальных параметров, предложенных различными авторами, на практике часто возникает необходимость в более строгой обоснованности предлагаемых методов анализа. Расчетные модели, с помощью которых анализируется скейлинг в физических объектах и световых полях, строятся часто из разных представлений, что затрудняет сравнение полученных результатов. К сказанному следует добавить в значительной степени амбивалентный характер процессов трансформации структуры зондирующих пучков. Поэтому в данной работе особое внимание уделено поиску и тестированию расчётных моделей, наиболее адекватно описывающих особенности рассматриваемой структуры и поля излучения.

В ходе численного моделирования было рассмотрено прохождение светового пучка через апериодические структуры (зеркала, решетки, фазовые экраны). При их моделировании использовались свойства числовых последовательностей Кантора, Морса–Туэ, Фибоначчи, двойного периода, Колакоски и некоторых специальных функций [4–6]. При просвечивании когерентным излучением систем с фрактальным распределением рассеивающих центров (например, кантороподобных систем) световые поля также обнаруживали признаки фрактальности. Фрактальные структуры в излучении наблюдались также при просвечивании систем

Морса–Туэ, Фибоначчи, двойного периода, хотя сами по себе эти системы не являются фрактальными. Это объясняется наличием у них скрытой внутренней симметрии самоподобия [7, 8]. Исключение составляет система Колакоски, которая при наличии внутренней системы самоподобия не формирует фрактальный спектр. При проведении расчетов оказалось целесообразным наряду с оценкой фрактальной размерности Хаусдорфа использовать представление о кластерных (массовых) размерностях. В общем случае фрактальные размерности спектров и фрактальные размерности структур могут заметным образом отличаться. Иногда (например, при использовании кантороподобных систем) увеличение фрактальной размерности структуры влекло уменьшение спектральной фрактальной размерности спектра. При этом сумма указанных размерностей составляла постоянную величину.

Особенности преобразования излучения апериодическими структурами видны из рис. 1, где представлены структура и оптические характеристики многослойной системы, чередование слоёв (А и В) в которой определяется последовательностью Фибоначчи. Такого рода многослойная система, строго говоря, не является фрактальной. Однако, её фурье–спектр, представляющий собой фурье–преобразование последовательности дельта-функций, располагающихся на границах между слоями, характеризуется присутствием целого ряда самоподобных элементов. Фактически такой фурье–спектр представляет собой картину дифракции, сформированную излучением от системы точечных источников, положение которых совпадает с положением дельта-функций и соответствует расположению точек над слоями многослойной системы (см. рис. 1,а). Присутствие фрактальных элементов в фурье–спектре объясняется наличием внутренней симметрии самоподобия, обусловленной определенным перестановочным законом [9].

Обращает на себя внимание определённое структурное соответствие между фурье–образом системы и спектром пропускания. Для иллюстрации указанного факта соответствующие пики в фурье–образе и спектре пропускания помечены одинаковыми латинскими

*E-mail: pvkorolenko@rambler.ru†E-mail: a.a.krasulin@gmail.com‡E-mail: physic_tx@list.ru

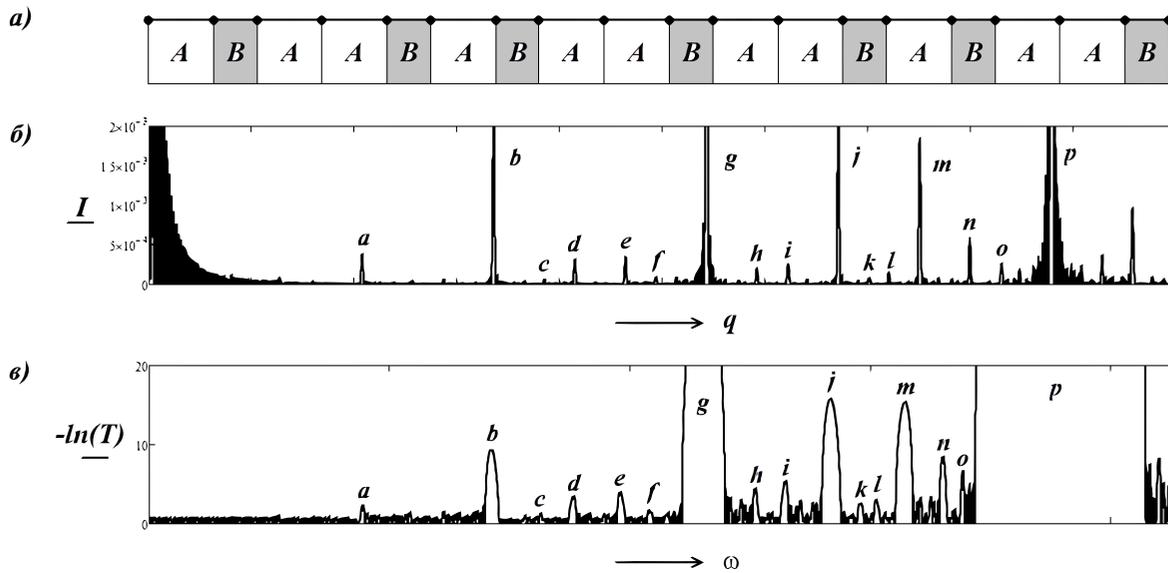


Рис. 1: Характеристики многослойной системы Фибоначчи. *a* — структура системы, *б* — её фурье-спектр (по мощности *I*), *в* — спектр коэффициента пропускания *T* (по мощности). *q* — пространственная частота, ω — частота излучения

буквами. Коэффициенты скейлинга на распределениях, показанных на рис. 1б и 1в, оказываются равными величине 1.59, весьма близкой к коэффициенту Золотого сечения. К коэффициенту Золотого сечения оказывается близкой и массовая фрактальная размерность фурье-образа ($D = 1.724$). Значительно выше оказывается величина D для спектра пропускания ($D = 4.178$). Таким образом, даже при определённом структурном соответствии анализируемые распределения обнаруживают различия в значениях фрактальной размерности.

Аналогичные закономерности оказываются свойственными и для систем, построенных на основе других аперiodических числовых последовательностей (Морса-Туэ, двойного периода). Исключение представляет собой система, построенная по принципу множества Колакоски [6]. Эта система обладает внутренней симметрией самоподобия, однако, как показали расчёты, её фурье-образ и соответствующий спектр пропускания не содержат фрактальных элементов.

Аналогичная проблема, связанная с соотношением фрактальных размерностей объекта и зондирующего светового пучка, возникает, когда рассматривается прохождение излучения через фрактальные фазовые экраны (волны, прошедшие фрактальный фазовый экран, получили название диффрактолов). Практический интерес к такой задаче обусловлен возможностью моделировать с помощью таких экранов процесс прохождения излучения через турбулентную атмосферу [1]. Поскольку нас в первую очередь интересуют фрактальные характеристики амплитудных и фазовых

распределений волн, прошедших фазовый экран, мы не будем использовать модель диапазонно-ограниченного экрана, а рассмотрим случай безграничной волны.

Пропускание фазового экрана описывалось функцией Вейерштрасса, задаваемой формулой

$$\Phi_k = \sqrt{2}\sigma [1 - b^{2D-4}]^{1/2} \times \frac{\sum_{n=0}^N b^{(D-2)\cdot n} \cdot \cos(2\pi \cdot s \cdot b^n \cdot k + \psi_n)}{1 - b^{(2D-4)(N+1)}}, \quad (1)$$

где σ — стандартное отклонение, b, s — параметры пространственно-частотного масштабирования, D — фрактальная размерность, связанная с параметром Херста H соотношением $D = 2 - H$. $N+1$ — количество гармоник, ψ_n — фаза, распределённая случайным образом на интервале $[0, 2\pi]$, k — величина, характеризующая поперечную координату в дискретном представлении. Считалось, что на экран падает плоская однородная волна с единичной амплитудой. Распределение амплитуды и фазы световых колебаний дифрагированной на фазовом экране волны рассчитывалось с использованием соотношений, приведенных в [10] для характеристики дифракции волны с синусоидальным профилем волнового фронта. Поскольку функция Вейерштрасса содержит сумму гармонических функций, то указанные соотношения могут быть использованы при аналитическом описании поля дифракции на фазовом экране. Этот подход приводит к следующей формуле для поля дифракции:

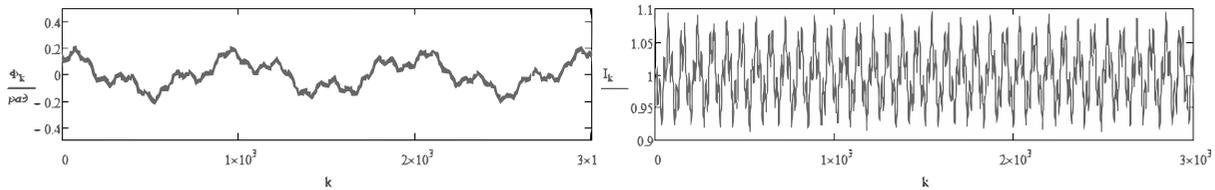


Рис. 2: Структура диффракта на расстоянии $z = 10$ от экрана, $\sigma = 0.1$; слева — распределение фазы Φ_k , справа — распределение интенсивности I_k (в относ. ед.), k — поперечная координата в дискретном представлении

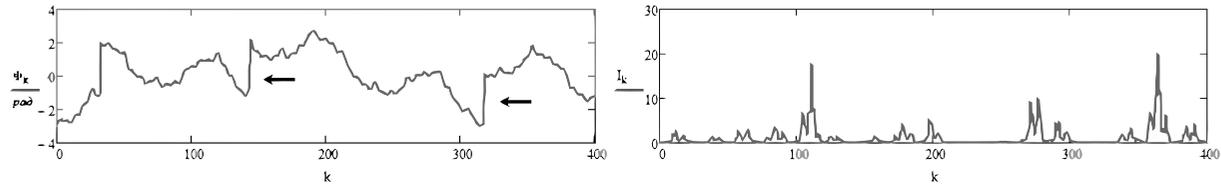


Рис. 3: Структура диффракта на расстоянии $z = 1$ от экрана, $\sigma = 3.6$; слева — распределение фазы, справа — распределение интенсивности. Стрелки указывают на положение дислокаций на волновом фронте

$$A_k = \prod_{m=0}^M \left[\sum_{q=-8}^{-1} \left[J_n \left[|q|, b^{(D-2) \cdot m} \cdot \zeta \right] \cdot (-1)^{|q|} \cdot e^{-i \cdot [2\pi \cdot z \cdot b^{2 \cdot m} \cdot q^2 - 2\pi \cdot x \cdot s \cdot k \cdot b^m \cdot q - q \cdot (\psi_m + \frac{\pi}{2})]} \right] + \right. \tag{2}$$

$$\left. + \sum_{q=0}^8 \left[J_n \left[|q|, b^{(D-2) \cdot m} \cdot \zeta \right] \cdot (-1)^{|q|} \cdot e^{-i \cdot [2\pi \cdot z \cdot b^{2 \cdot m} \cdot q^2 - 2\pi \cdot x \cdot s \cdot k \cdot b^m \cdot q - q \cdot (\psi_m + \frac{\pi}{2})]} \right] \right],$$

где J_n — функция Бесселя, характеризующая амплитуду одной из плоских волн, по которым осуществляется разложение диффракта, ζ — величина, характеризующая дисперсию распределения, z — нормированное расстояние от экрана, x — дополнительный нормировочный множитель.

Характерный вид распределения интенсивности и фазы дифрагированной волны на некотором произвольном расстоянии z от экрана приведен на рис. 2. Фрактальная размерность распределения амплитуды и фазы определялась по методу, основанному на анализе поведения структурных функций анализируемых сигналов [11]. Данная фрактальная размерность по своему типу относится к фрактальной размерности Хаусдорфа.

В ходе численного моделирования прохождения излучения особое внимание уделялось сопоставлению особенностей амплитудно-фазовых распределений в режимах слабых и сильных флуктуаций. Рис. 2 соответствует случаю слабых флуктуаций. При переходе к сильным флуктуациям распределение амплитуды и фазы качественным образом менялось. Это связано, прежде всего, с формированием на волновом фронте излучения дислокационных образований, обуславливающих скачкообразные изменения фазы на величину π .

На рис. 3 приведена флуктуационная структура излучения для случая сильных флуктуаций.

Обобщение данных о скейлинговых характеристиках амплитуды и фазы позволило установить важную закономерность, согласно которой размерности в распределениях фазы и амплитуды оказались примерно одинаковыми и близкими к фрактальной размерности функции пропускания экрана. При этом ход рассчитанных распределений указывал на то, что переход к сильным флуктуациям несколько увеличивал значения фрактальной размерности флуктуаций интенсивности.

Таким образом, результаты выполненных расчетов указывают на существование определенной связи между скейлинговыми характеристиками объекта и фрактальными признаками в структуре полей дифракции зондирующих световых пучков. Однако, эта связь не подчиняется единой общей закономерности и при анализе конкретных явлений требует уточнения как с точки зрения применения адекватной теоретической модели, так и с точки зрения метода оценки параметров скейлинга.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант офи-м 14-22-01086).

- [1] *Потапов А. А.* Фракталы в радиофизике и радиолокации. М.: Логос, 2002.
- [2] *Боголюбов А. Н., Петухов А. А., Шапкина Н. Е.* Вестн. Моск. ун-та. Сер. 3. Физ. Астрон. № 2. С. 7. (2008).
- [3] *Korolenko P. V., Mishin A. Y., Ryzhikova Yu. V.* Optik - International Journal for Light and Electron Optics. **124**(19). P. 3946. (2013).
- [4] *Albuquerque E. L., Cottam M. G.* Physics Reports. **376**. P. 225. (2003).
- [5] *Мучник А. А., Притыкин Ю. Л., Семёнов А. Л.* УМН. **64**, Вып. 5(389). С. 21. (2009).
- [6] *Fesenko V. I.* Waves in Random and Complex Media. **24**. N 2. P. 174. (2014).
- [7] *Гратиа Д.* УФН. **156**, Вып. 2. С. 347. (1988).
- [8] *Зотов А. М., Короленко П. В., Мишин А. Ю.* Кристаллография. **55**, № 8. С. 965. (2010).
- [9] *Грушина Н. В.* и др. Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. № 4. С. 47. (2009). (*Grushina N. V., Zotov A. M., Korolenko P. V.* et al. *Mosc. Univ. Phys. Bull.* 2009. **64**, N 4. P. 407).
- [10] *Гудмен Дж.* Введение в фурье-оптику. М.: Мир, 1970.
- [11] *Кроновер Р. М.* Фракталы и хаос в динамических системах. Основы теории. М.: Постмаркет, 2000.

On the transformation of coherent radiation by fractal structures

P. V. Korolenko^{1,2,a}, A. A. Krasulin^{1,b}, A. Yu. Mishin^{1,c}, R. T. Kubanov^{1,d}

¹*Department of chair of optics, spectroscopy and nanosystem physics, Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University Moscow 119991, Russia*

²*P. N. Lebedev Physical Institute, Russian Academy of Science. Moscow 119991, Russia*

E-mail: ^apvkorolenko@rambler.ru, ^ba.a.krasulin@gmail.com, ^cphysic_tx@list.ru, ^dpvkorolenko@rambler.ru

The possibilities and features of the some methods of calculation of the scaling characteristics of radiation interacting with objects, which have obvious and hidden fractal characteristics, are analyzed. The data on the relationship of the scaling parameters of objects and probing beams are presented.

PACS: 42.25.Fx; 42.30.Kq; 61.43.Hv; 61.46.-w

Keywords: fractal, fractal dimension, multilayer systems, diffraction.

Сведения об авторах

1. Короленко Павел Васильевич — доктор физ.-мат. наук, профессор; тел.: (495) 939-57-40 e-mail: pvkorolenko@rambler.ru.
2. Красулин Артем Андреевич — студент; тел.: 8-985-663-27-93, e-mail: a.a.krasulin@gmail.com.
3. Мишин Алексей Юрьевич — инженер; тел.: (495) 939-17-17 e-mail: physic_tx@list.ru.
4. Кубанов Рустам Тарханович — студент; тел.: (495) 939-57-40, e-mail: pvkorolenko@rambler.ru.