Распределение заряда на проводящих эллипсоиде и диске

Д. В. Белов,* С. Н. Горшков†
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова,
физический факультет, кафедра общей физики и физики конденсированного состояния.
Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2.
(Статья поступила 08.06.2016; Подписана в печать 07.07.2016)

Дано элементарное решение известной задачи электростатики о распределении заряда по поверхности проводящего эллипсоида.

PACS: 41.20.Cv УДК: 537.2
Ключевые слова: электростатика, распределение заряда, проводящий эллипсоид.

ВВЕДЕНИЕ

Распределение заряда на поверхности уединенного проводящего эллипсоида в условиях электростатического равновесия рассчитывается строго с привлечением уравнения Лапласа для потенциала (например, [1, с. 38–42]). В настоящей работе эта задача решается с использованием математического аппарата, доступного студентам первого курса и даже продвинутым школьникам.

1. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЗАРЯДА ПО ПОВЕРХНОСТИ ЭЛЛИПСОИДА

Искомую формулу для поверхностной плотности заряда $\sigma(x, y, z)$ на поверхности заряженного проводящего эллипсоида можно получить, обобщая рассуждение, при помощи которого в школьном курсе доказывается, что внутри уединенной заряженной проводящей сферы напряженность электростатического поля равна нулю. Формула поверхности эллипсоида с полуосями a, b, c, расположенными вдоль координатных осей x, y, z, имеет вид [2, с. 190]:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \tag{1}$$

Рассмотрим произвольную точку A внутри эллипсоида и проведем коническую поверхность с малым телесным углом раствора с вершиной в этой точке (рис. 1). Эта поверхность вырежет в окрестности точек 1 и 2 с координатами x_1, y_1, z_1 и x_2, y_2, z_2 на поверхности эллипсоида две малые площадки ΔS_1 и ΔS_2, заряды на которых равны, соответственно, $\Delta q_1 = \sigma(x_1, y_1, z_1)\Delta S_1$ и $\Delta q_2 = \sigma(x_2, y_2, z_2)\Delta S_2$. Напряженности полей, создаваемых этими зарядами в точке A, имеют противоположные направления и взаимно компенсируются, если окажутся равными по модулю, т. е. если выполняется условие

$$\frac{\sigma(x_1, y_1, z_1)\Delta S_1}{r_{A1}^2} = \frac{\sigma(x_2, y_2, z_2)\Delta S_2}{r_{A2}^2}, \tag{2}$$

где r_{A1} и r_{A2} — расстояния от точки A до точек 1 и 2, соответственно.

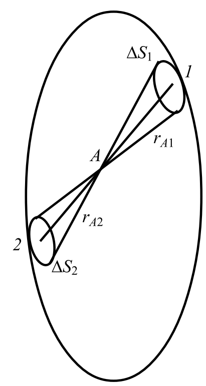

Рис. 1:

Для величины малого телесного угла справедлива формула: $\Delta\Omega = \Delta S_\perp / r^2$, где $\Delta S_\perp$ — площадка, заключенная в пределах телесного угла и перпендикулярная радиус–вектору $\mathbf{r}$, проведенному к ней из вершины угла (в силу малости угла, в общем определении телесного угла $\Omega = S/R^2$ площадь S сферического элемента можно заменить на площадь стягивающего его плоского элемента $\Delta S_\perp$, а радиус сферы — на расстояние r, практически одинаковое для всех точек элемента $\Delta S_\perp$). Как видно из рис. 2, $\Delta S_\perp = \Delta S \cos\alpha$, где α — угол между вектором $\mathbf{r}$ и внешней нормалью $\mathbf{n}$ к элементу ΔS, так что равенство (2) принимает вид:

$$\frac{\sigma(x_1, y_1, z_1)\Delta S_{1\perp}}{r_{A1}^2 \cos\alpha_1} = \frac{\sigma(x_2, y_2, z_2)\Delta S_{2\perp}}{r_{A2}^2 \cos\alpha_2}. \tag{3}$$

С учетом равенства телесных углов, опирающихся на элементы ΔS_1 и ΔS_2 ($\Delta S_{1\perp}/r_{A1}^2 = \Delta S_{2\perp}/r_{A2}^2$), равенство (3) дает:

$$\frac{\sigma(x_1, y_1, z_1)}{\sigma(x_2, y_2, z_2)} = \frac{\cos\alpha_1}{\cos\alpha_2}, \tag{4}$$

---

*E-mail: e.majorana@mail.ru
†E-mail: gorshkov@phys.msu.ru

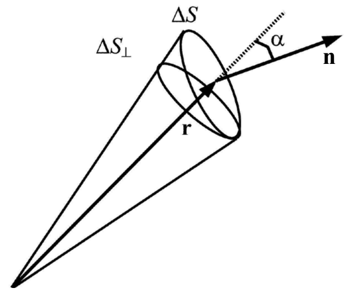

Рис. 2:

где α_1 и α_2 — углы, образованные внешними нормалями $\mathbf{n}_1$ и $\mathbf{n}_2$ в точках 1 и 2 поверхности эллипсоида с направлениями векторов, соответственно, $\mathbf{r}_{21}$ и $\mathbf{r}_{12}$, соединяющих эти точки (рис. 3).

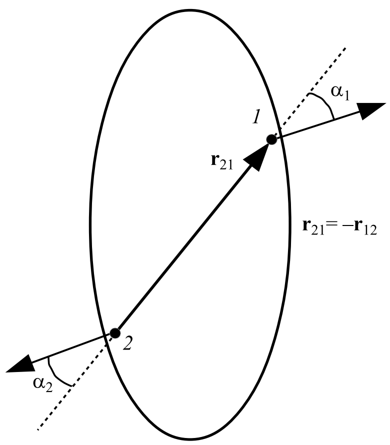

Рис. 3:

Варьируя ориентацию отрезка $r_{12} = |\mathbf{r}_{12}|$, проходящего через точку A, можно разбить всю поверхность эллипсоида на пары соответственных малых элементов рассмотренным выше образом. Если заряд распределен так, что значения его поверхностной плотности во всех точках поверхности будут соотноситься между собой согласно условию (4), то напряженности полей, создаваемых каждой парой соответственных элементов, будут взаимно скомпенсированы и напряженность поля в точке A окажется равной нулю. Для того чтобы поле отсутствовало во всех точках внутри эллипсоида, что является необходимым и достаточным условием равновесия зарядов, нужно потребовать выполнение соотношения (4) для двух любых точек поверхности эллипсоида.

Преобразуем отношение косинусов в формуле (4), воспользовавшись определением скалярного произведения векторов $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ [2, с. 59]:

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = |\mathbf{A}||\mathbf{B}|\cos\alpha, \tag{5}$$

где α — угол между этими векторами. Для нашего случая имеем:

$$\cos\alpha_1 = \frac{\mathbf{r}_{21}\cdot\mathbf{n}_1}{|\mathbf{r}_{21}||\mathbf{n}_1|}, \quad \cos\alpha_2 = \frac{\mathbf{r}_{12}\cdot\mathbf{n}_2}{|\mathbf{r}_{12}||\mathbf{n}_2|}. \tag{6}$$

Формулу для проекций нормалей к поверхности эллипсоида получим, взяв дифференциал от обеих частей равенства (1) и разделив на 2:

$$\frac{x}{a^2}\,dx + \frac{y}{b^2}\,dy + \frac{z}{c^2}\,dz = 0. \tag{7}$$

Согласно известной формуле для скалярного произведения [2, с. 62]

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z, \tag{8}$$

равенство (7) означает, что вектор с проекциями $x/a^2, y/b^2, z/c^2$ в точке (x,y,z) на поверхности эллипсоида перпендикулярен любому малому перемещению $d\mathbf{r} = (dx,dy,dz)$ вдоль поверхности эллипсоида в окрестности этой точки (равенство нулю скалярного произведения означает взаимную перпендикулярность векторов). Таким образом, векторы

$$\mathbf{n}(x,y,z) = \left(\frac{x}{a^2}, \frac{y}{b^2}, \frac{z}{c^2}\right) \tag{9}$$

образуют поле нормалей (как легко убедиться — внешних) к поверхности эллипсоида. Для поля нормалей (9) скалярные произведения в формулах (6) равны, в чем можно убедиться, выразив проекции векторов $\mathbf{r}_{21}, \mathbf{r}_{12}, \mathbf{n}_1$ и $\mathbf{n}_2$ через координаты (x_1,y_1,z_1) и (x_2,y_2,z_2) точек 1 и 2 и используя формулу (8):

$$\mathbf{r}_{21}\cdot\mathbf{n}_1 = \mathbf{r}_{12}\cdot\mathbf{n}_2 = 1 - \frac{x_1x_2}{a^2} - \frac{y_1y_2}{b^2} - \frac{z_1z_2}{c^2}.$$

Следовательно, $\cos\alpha_1/\cos\alpha_2 = |\mathbf{n}_2|/|\mathbf{n}_1|$, и условие (4) принимает вид:

$$\frac{\sigma(x_1,y_1,z_1)}{\sigma(x_2,y_2,z_2)} = \frac{|\mathbf{n}_2|}{|\mathbf{n}_1|}. \tag{10}$$

Эта формула позволяет найти распределение поверхностной плотности заряда по ее заданному значению в одной точке поверхности эллипсоида. Выберем в качестве точки 1 какую-либо фиксированную точку поверхности эллипсоида, например точку $(x = a, y = 0, z = 0)$, значение поверхностной плотности заряда в которой обозначим σ_a. Согласно (9), нормаль в этой точке имеет проекции $\mathbf{n}_a = (1/a, 0, 0))$ и модуль $|\mathbf{n}_a| = 1/a$. Тогда, если под точкой 2 понимать произвольную точку поверхности эллипсоида с координатами (x,y,z) , в которой нормаль (9) имеет модуль $\left(x^2/a^4 + y^2/b^4 + z^2/b^4\right)^{1/2}$, поверхностная плотность заряда в ней определится согласно (10) формулой:

$$\sigma(x,y,z) = \frac{\sigma_a}{a}\left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}\right)^{-1/2}. \tag{11}$$

Очевидно, что плотность заряда, рассчитанная по формуле (11), обеспечит выполнение соотношения (10) для любых двух точек поверхности эллипсоида. Из формулы (11) следует, что плотность максимальна в двух точках, лежащих на наибольшей оси, т. е. наиболее удаленных друг от друга, и минимальна в двух точках, расположенных на короткой оси.

Оставшийся неопределенным в (11) коэффициент σ_a/a можно найти следующим образом [3]. Положим

$$\frac{\sigma_a}{a} = kQ, \tag{12}$$

где Q — полный заряд эллипсоида, а k — коэффициент, который имеет размерность обратного объема и легко находится из условия

$$\int \sigma dS = Q, \tag{13}$$

где σ — поверхностная плотность заряда, dS — элемент площади поверхности эллипсоида. Как следует из рассуждений перед формулой (3) и рис. 2, $dS = r^2 d\Omega/\cos\alpha$, где $d\Omega$ — элемент телесного угла, r — модуль радиус-вектора $\mathbf{r}$, проведенного из начала координат в произвольную точку на поверхности эллипсоида, α — угол между $\mathbf{r}$ и внешней нормалью $\mathbf{n}$ к поверхности в этой точке. Тогда (13) с учетом (12), (11) и (9) принимает вид

$$k \int \frac{r^3 d\Omega}{|\mathbf{n}|\, r \cos\alpha} = 1. \tag{14}$$

Здесь знаменатель подынтегрального выражения в силу определения скалярного произведения (5), выражения (9) и уравнения эллипсоида (1) равен $\mathbf{n}\cdot\mathbf{r} = 1$, а числитель имеет простой геометрический смысл: $r^3 d\Omega = 3dV$, где dV — элементарный объем в виде конуса (с площадью основания $dS_\perp = r^2 d\Omega$ и высотой r). В результате из (14) получаем

$$3k \int dV = 1,$$

$$k = \frac{1}{3V} = \frac{1}{4\pi abc}, \tag{15}$$

где использована известная формула для объема эллипсоида V. Напомним, что эта формула легко выводится:

$$V = \int\limits_D dxdydz = abc \int\limits_{D_1} dx_1 dy_1 dz_1 = \frac{4\pi}{3} abc.$$

Здесь D — объем, ограниченный поверхностью эллипсоида (1), который в результате замены переменных интегрирования $x = ax_1, y = by_1, z = cz_1$ сводится к объему шара единичного радиуса, равному $4\pi/3$.

Из (15), (12) и (11) получаем окончательно:

$$\sigma(x,y,z) = \frac{Q}{4\pi abc}\left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}\right)^{-1/2}, \tag{16}$$

что совпадает с формулой (4.16) на с. 42 книги [1].

2. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЗАРЯДА ПО ПОВЕРХНОСТИ ДИСКА

Подробно исследуем случай, когда одна из полуосей, например a, стремится к нулю, т. е. эллипсоид вырождается в бесконечно тонкий диск в форме эллипса, расположенный в плоскости yz. Чтобы осуществить предельный переход в формуле (16), внесем множитель a под знак корня и с целью исключить неопределенность в первом слагаемом x^2/a^2 под корнем $(x \to 0, a \to 0)$, выразим его из уравнения (1): $x^2/a^2 = 1 - y^2/b^2 - z^2/c^2$. Второе слагаемое под корнем $a^2(y^2/b^4 + z^2/c^4)$ при $a \to 0$ обращается в нуль, и формула (16) принимает вид:

$$\sigma(y,z) = \frac{Q}{4\pi bc}\left(1 - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}\right)^{-1/2}. \tag{17}$$

Для круглого диска радиуса R, полагая в формуле (17) $b = c = R$, имеем:

$$\sigma(\rho) = \frac{Q}{4\pi R^2}\left(1 - \frac{\rho^2}{R^2}\right)^{-1/2}, \tag{18}$$

где $\rho = \sqrt{y^2+z^2}$ — расстояние от центра диска.

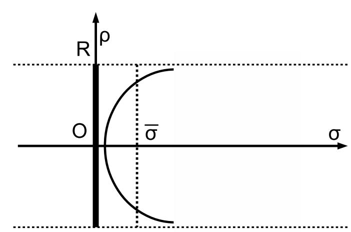

Рис. 4:

Подчеркнем, что формулы (17) и (18) описывают распределение заряда на каждой из двух равноправных сторон диска. График зависимости $\sigma(\rho)$ приведен на рис. 4. Поверхностная плотность заряда минимальна в центральных точках поверхностей диска $(\rho = 0)$, где она вдвое меньше средней плотности $\bar{\sigma}$: $\sigma(0) = Q/(4\pi R^2) = \bar{\sigma}/2$, и возрастает к краям, стремясь к бесконечности при $\rho \to R$. Согласно известной формуле $E = \sigma/\varepsilon_0$, связывающей поверхностную плотность заряда на проводнике с напряженностью поля ([4], с. 33), аналогичным образом ведет себя напряженность поля на внешней стороне поверхности проводника. Особенности в зависимостях $\sigma(\rho)$ и $E(\rho)$ возникли вследствие идеализации, связанной с предельным переходом $a \to 0$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, используя закон Кулона, принцип суперпозиции для электрического поля и элементарные геометрические построения, мы вывели формулу для распределения электрического заряда по поверхности проводящего эллипсоида общего вида. Затем специальным предельным переходом из нее было получено распределение заряда по тонкому диску в форме эллипса (и, в частности, в форме круга). Заметим, что решение этой известной задачи электростатики на основе уравнения Лапласа для потенциала электростатического поля [1] требует перехода от декартовых координат к эллипсоидальным, в которых указанное уравнение имеет весьма сложный вид, а потенциал выражается в виде эллиптического интеграла первого рода. Плотность заряда при этом определяется нормальной производной потенциала на поверхности эллипсоида.

Благодарности

Авторы выражают благодарность профессору А. В. Борисову за полезное обсуждение.

[1] *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Электродинамика сплошных сред. 4-е изд., стереот. (М.: Физматлит, 2005).
[2] *Ильин В. А., Позняк Э. Г.* Аналитическая геометрия. 7-е изд., стереот. (М.: Физматлит, 2004).
[3] Это замечание принадлежит А. В. Борисову и С. Н. Горшкову.
[4] *Калашников С. Г.* Электричество. 6-е изд., стереот. (М.: Физматлит, 2003).

Charge distribution on a conducting ellipsoid and a disk

D. V. Belov[a], S. N. Gorshkov[b]

Department of General Physics and Condensed Matter Physics, Faculty of Physics, M. V. Lomonosov Moscow State University, Moscow 119991, Russia.
E-mail: [a]e.majorana@mail.ru, [b]gorshkov@phys.msu.ru

We give an elementary solution to the well-known problem of electrostatics on the charge distribution over the surface of a conducting ellipsoid.

PACS: 41.20.Cv
Keywords: electrostatics, charge distribution, conducting ellipsoid.
Received 08 June 2016.

Сведения об авторах

1. Белов Дмитрий Владимирович — канд. физ.-мат. наук, доцент, доцент; тел.: (495) 939-11-42, e-mail: e.majorana@mail.ru.
2. Горшков Сергей Николаевич — канд. физ.-мат. наук, доцент, доцент; тел.: (495) 939-11-28, e-mail: gorshkov@phys.msu.ru.