

## Трехмерная численная модель волн цунами

С. В. Колесов,\* М. А. Носов†

*Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова,  
физический факультет, кафедра физики моря и вод суши  
Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2*

(Статья поступила 25.04.2016; Подписана в печать 05.05.2016)

Описана численная модель, предназначенная для воспроизведения диспергирующих гравитационных волн и гидроакустических волн, возбуждаемых сейсмическими движениями дна. Модель состоит из двух динамически связанных модулей. Глубоководный модуль основан на 3D уравнениях линейной потенциальной теории сжимаемой жидкости. Мелководный модуль использует уравнения линейной теории длинных волн. Численная модель применена для воспроизведения цунами 2007 г. на Центральных Курильских островах. Обсуждаются проявления сжимаемости воды вблизи источника цунами и проявления фазовой дисперсии волн цунами.

PACS: 91.30.Nw.

УДК: 551.466.

Ключевые слова: генерация цунами, распространение цунами, фазовая дисперсия, сжимаемость воды, численное моделирование.

Большинство современных моделей цунами построены в рамках теории длинных волн [1–4]. В силу использования уравнений гидродинамики, проинтегрированных по вертикали, такие модели являются двумерными (2D), и — по сравнению с 3D моделями — они обеспечивают существенный выигрыш в объеме необходимых вычислений. Однако, базовые предположения теории длинных волн (несжимаемость воды и гидростатическое приближение) исключают из круга рассматриваемых явлений как гидроакустические эффекты, так и фазовую дисперсию гравитационных волн. Вместе с тем хорошо известно, что генерации цунами сопутствуют эффекты сжимаемости воды [2, 4–6], а проявления фазовой дисперсии практически всегда оказываются заметными при распространении волн на трансокеанские расстояния [4, 7, 8]. Более того, в ряде случаев, например, если узкий очаг приурочен к глубоководному желобу, волны цунами характеризуются столь значительной дисперсией, что ее проявления должны быть заметны даже на небольшом удалении от источника [4]. И, конечно, следует особо упомянуть цунами, возникающие в результате вулканических взрывов, падения метеоритов или обвалов и оползней, — такие волны как правило являются сильно диспергирующими, для их описания длинноволновые модели не могут быть использованы в принципе.

Построение моделей цунами на основе полных 3D уравнений Навье–Стокса несомненно является заманчивой альтернативой традиционному длинноволновому подходу. Но эта альтернатива на практике сталкивается как с очевидными вычислительными сложностями, так и с принципиальными проблемами описания гидродинамической турбулентности. Мы предлагаем для

описания динамики цунами использовать 3D линейную потенциальную теорию (ЛПТ) сжимаемой жидкости. Обоснование применимости линейной теории в глубоком океане для описания цунами сейсмического происхождения и сопутствующих гидроакустических возмущений обоснована в работах [4, 9]. Находясь на более высокой ступеньке в иерархии моделей, по сравнению с теорией длинных волн, ЛПТ описывает как эффекты сжимаемости воды, так и фазовую дисперсию гравитационных волн. По сравнению с уравнениями Навье–Стокса, ЛПТ, разумеется, расположена на более низкой иерархической ступеньке. Но в противоположность 3D уравнениям Навье–Стокса, уравнения ЛПТ, на современном этапе развития вычислительной техники, могут быть решены численными методами на акваториях океанского масштаба. Следовательно, ЛПТ представляет собой приемлемую на современном этапе альтернативу для описания диспергирующих волн цунами и сопутствующих гидроакустических эффектов в глубоком океане.

С точки зрения описания цунами применимость ЛПТ можно поставить под сомнение только в мелководной прибрежной зоне, где возрастает амплитуда волн и, следовательно, увеличивается значимость нелинейных эффектов. Но примечательно, что при приближении волны к мелководью, из-за увеличения отношения длины волны к глубине, снижается также и роль фазовой дисперсии. Более того, на мелководье становятся несущественными гидроакустические эффекты: возникшие на больших глубинах в очаге цунами гидроакустические волны из-за существования частоты отсечки не проникают на мелководье. Следовательно, с одной стороны, применение ЛПТ на мелководье представляется некорректным по причине пренебрежения нелинейностью, но с другой стороны в использовании ЛПТ в этой зоне уже нет практической целесообразности: на мелководье можно ограничиться нелинейной теорией длинных волн.

\*E-mail: kolesov@ocean.phys.msu.ru

†E-mail: nosov@phys.msu.ru

Изложенные выше соображения показывают, что расчет динамики цунами от генерации в очаге до наката на берег имеет смысл проводить, используя комплекс из двух связанных моделей: 3D линейной потенциальной на больших глубинах и 2D длинноволновой на мелководье. Сразу отметим, что в этой работе для мелководной зоны мы будем использовать линейную длинноволновую модель. Это необходимый методический этап перед переходом к использованию более сложных нелинейных уравнений с возможностью описания наката цунами на берег по схеме «осушение–затопление».

Далее остановимся на описании физической и математической модели. Будем рассматривать слой идеальной (невязкой) однородной сжимаемой жидкости переменной глубины в поле силы тяжести. Слой жидкости ограничен сверху свободной поверхностью, а снизу — подвижным, но непроницаемым и абсолютно жестким дном. Разделим расчетную область на глубоководную и мелководную части изобатой  $H_0$ . В глубоководной части задача о генерации и распространении волн цунами решается в рамках линейной потенциальной теории сжимаемой жидкости. Уравнения гидродинамики в этом случае сводятся к волновому уравнению относительно потенциала скорости течения  $F$  [4]

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = c^2 \Delta F, \quad (1)$$

где  $c$  — скорость звука в воде. На свободной поверхности жидкости применяется граничное условие, типичное для теории гравитационных волн малой амплитуды

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = -g \frac{\partial F}{\partial \mathbf{n}_s}, \quad (2)$$

где  $\mathbf{n}_s$  — нормаль к невозмущенной свободной поверхности жидкости,  $g$  — ускорение силы тяжести. На подвижном абсолютно жестком дне ставится условие непротекания

$$\frac{\partial F}{\partial \mathbf{n}_b} = (\mathbf{U}, \mathbf{n}_b), \quad (3)$$

где  $\mathbf{U} = (U_x, U_y, U_z)$  — вектор скорости сейсмических движений дна и его компоненты в локальной декартовой системе координат (ось  $0z$  направлена вертикально вверх, оси  $0x$  и  $0y$  — горизонтально),  $\mathbf{n}_b$  — вектор нормали к поверхности дна. Будем полагать, что амплитуда сейсмических движений дна мала по сравнению с глубиной океана. Фактически это предположение означает, что можно пренебречь изменениями глубины океана и изменениями поля нормалей к поверхности дна.

В мелководной области решается уравнение линейной теории длинных волн, записанное также в терминах потенциала скорости течения [4]

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = \nabla (gH \nabla F) - gW, \quad (4)$$

где  $H$  — глубина океана,  $\nabla$  — двумерный дифференциальный оператор, действующий по горизонтали,  $W$  — скорость движения поверхности дна в вертикальном направлении. Скалярная величина  $W$  связана с вектором скорости сейсмических движений дна и распределением глубин следующей формулой [4, 10]:

$$W = U_x \frac{\partial H}{\partial x} + U_y \frac{\partial H}{\partial y} + U_z. \quad (5)$$

На береговой линии, точнее на заданной изобате (10 м), для длинноволновой модели ставилось условие непротекания — горизонтальная проекция формулы (3). В рассматриваемом ниже примере расчета реальных волн цунами все сейсмические движения были сосредоточены вдали от берега, поэтому граничное условие на линии берега имело нулевую правую часть.

Уравнения и граничные условия глубоководного блока (1)–(3) записывались в криволинейных (сигма-сферических) координатах. Переход к сигма координатам отображает расчетную область сложной формы, которая ограничена снизу неровным дном, на прямоугольный параллелепипед, что существенно упрощает постановку граничного условия на дне. Кроме того, в отличие от «z-level» модели, исключается проблема задания глубины океана «с точностью до  $\Delta z$ » и возникает возможность проводить 3D моделирование как угодно близко к берегу, не увеличивая при этом число узлов сетки по вертикали в глубоководной области. Переход к сферическим координатам отражает естественную геометрию задачи и в специальном обосновании не нуждается.

Связь сигма-сферической системы координат с декартовой осуществлялась по следующим формулам:

$$x(\sigma, \theta, \varphi) = [R - \sigma H(\theta, \varphi)] \cos \theta \cos \varphi, \quad (6)$$

$$y(\sigma, \theta, \varphi) = [R - \sigma H(\theta, \varphi)] \cos \theta \sin \varphi, \quad (7)$$

$$z(\sigma, \theta, \varphi) = [R - \sigma H(\theta, \varphi)] \sin \theta, \quad (8)$$

где  $\theta$  — широта,  $\varphi$  — долгота,  $R$  — радиус Земли. Координата  $\sigma$  варьировалась от 0 на свободной поверхности воды, до 1 на дне океана.

Параметры Ламе, необходимые для записи дифференциальных операторов в сигма-сферической системе координат, были вычислены стандартным способом по формулам (6)–(8):

$$h_\theta = \sqrt{(R - \sigma H)^2 + \sigma^2 \left( \frac{\partial H}{\partial \theta} \right)^2} \approx \sqrt{R^2 + \sigma^2 \left( \frac{\partial H}{\partial \theta} \right)^2}, \quad (9)$$

$$h_\varphi = \sqrt{\cos^2 \theta (R - \sigma H)^2 + \sigma^2 \left( \frac{\partial H}{\partial \varphi} \right)^2} \approx \sqrt{R^2 \cos^2 \theta + \sigma^2 \left( \frac{\partial H}{\partial \varphi} \right)^2}, \quad (10)$$

$$h_{\sigma} = H. \quad (11)$$

Приближенный вариант формул (9), (10) основан на том факте, что радиус Земли существенно превосходит глубину океана:  $R \gg H$ .

Уравнение 2D мелководного блока (4), дополненное граничным условием на береговой линии, записывалось в традиционной сферической системе координат (на поверхности сферы) [11]. Получить формулы для связи сферической и декартовой систем координат, а также соответствующие параметры Ламе можно из выражений (6)–(8) и (9)–(11), положив  $\sigma = 0$ .

Полученные в итоге уравнения глубоководного и мелководного блоков решались совместно явным конечно-разностным методом на равномерных сетках. Шаги сеток по долготе и широте в глубоководном и мелководном блоке были эквивалентны. Оба расчетных блока динамически сопрягались вдоль заданной изобаты  $H_0$  (в представленном ниже примере  $H_0 = 1000$  м). Технически сопряжение блоков было достаточно простым в силу того, что задачи задачи глубоководного и мелководного блоков решались относительно единой функции — потенциала скорости течения. По найденному потенциалу можно было легко рассчитать все искомые поля (смещение свободной поверхности  $\xi$ , вектор скорости течения  $\mathbf{v}$ , динамическое давление  $p$ ):

$$\xi = -\frac{1}{g} \frac{\partial F}{\partial t}$$

(производная берется на свободной поверхности),

$$\mathbf{v} = \nabla F,$$

$$p = -\rho \frac{\partial F}{\partial t},$$

где  $\rho$  — плотность воды.

Численная модель верифицировалась на аналитических решениях задачи о генерации гравитационно-акустических волн деформациями дна в бассейне фиксированной глубины [12]. В результате тестов было показано, что гравитационные и гидроакустические волны воспроизводятся с хорошей точностью при числе слоев по вертикали  $N_z \geq 20$ .

Описанная численная модель применялась для расчета реальных волн цунами, вызванных землетрясениями на Центральных Курилах 15 ноября 2006 г. и 13 января 2007 г. Эти сейсмические события породили волны с высотами заплеска свыше 20 м на побережье Центральных Курильских островов [13].

В нашем распоряжении не было точного пространственно-временного закона деформации дна в очаге цунами. Но имелось пространственное распределение остаточных (косейсмических) деформаций дна, которое было нами рассчитано по распределению подвижки, предоставленному Геологической службой США (USGS) [14, 15]. Мы предположили, что деформация дна развивалась одновременно по всему

очагу цунами. Скорость деформации дна полагалась отличной от нуля в интервале  $0 < t < \tau$ . Внутри этого интервала скорость определялась следующей функцией:  $W(t) \sim (1 - \cos(2\pi t/\tau))/2$ . Продолжительность деформации дна  $\tau = 20$  с была выбрана по фактическому времени вспарывания основной части разрыва в очаге землетрясения 13 января 2007 г.

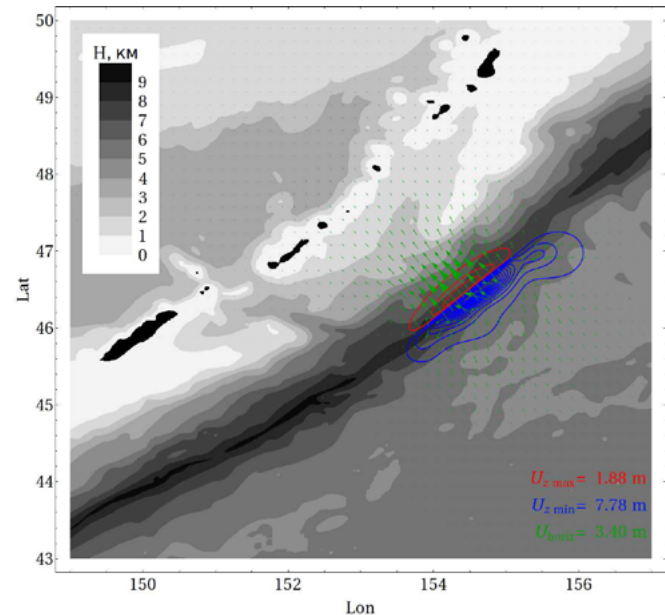


Рис. 1: Очаг цунами 13 января 2007 г. на Центральных Курильских островах. Вертикальная косейсмическая деформация дна океана показана изолиниями (красные линии — поднятие, синие — опускание, интервал 0.5 м). Горизонтальные косейсмические деформации показаны зелеными стрелками. В правом нижнем углу приведены максимальные значения поднятия и опускания дна, а также максимальная горизонтальная деформация. В левом верхнем углу показана цветовая шкала глубин

На рис. 1 представлено пространственное распределение косейсмических деформаций океанического дна в очаге цунами 13 января 2007 г. Из рисунка хорошо видно, что очаг цунами был довольно узким, и располагался он на больших глубинах в районе Курило-Камчатского желоба. В данном случае следовало ожидать заметного проявления дисперсионных эффектов, поэтому в настоящей работе мы сосредоточимся именно на событии 13 января 2007 г.

На рис. 2 представлены результаты численного моделирования волновых возмущений поверхности океана, вызванных деформацией дна в очаге цунами. Возмущения соответствуют моменту времени 720 с после момента начала землетрясения. Моделирование было выполнено двумя способами: с применением традиционной длинноволновой модели, представленной уравнением (4) (рис. 2а) и с применением 3D модели, сопряженной в мелководной области с длинноволновой моделью (рис. 2б). Разница оказывается весьма впечатляющей. На рис. 2б можно видеть, что волны

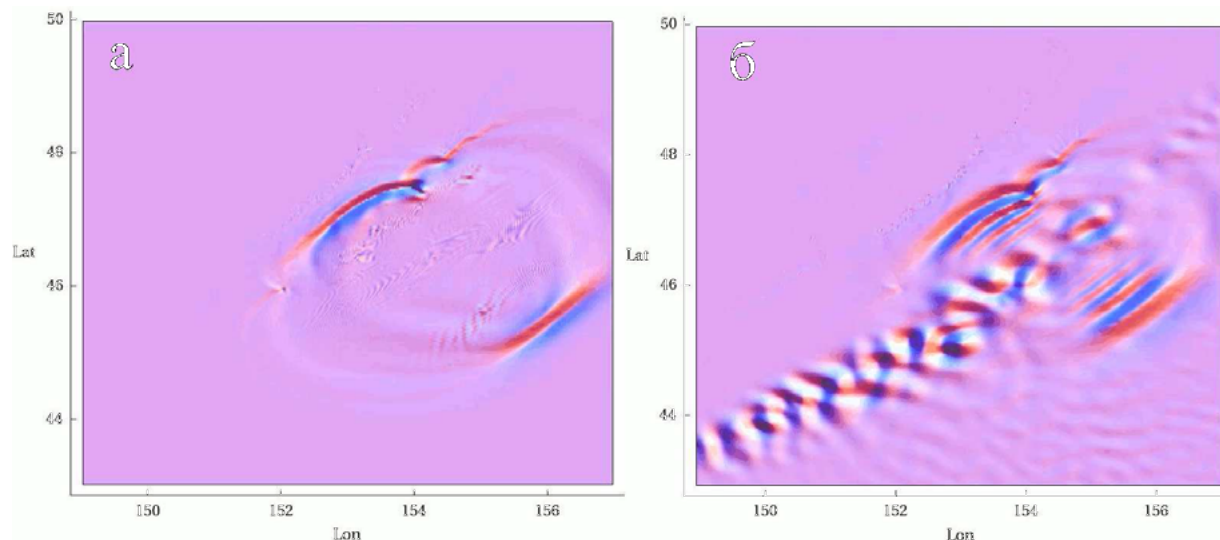


Рис. 2: Примеры численного расчета возмущений на поверхности воды в момент времени 720 с после начала землетрясения 13 января 2007 г. Расчет выполнен с применением традиционной длинноволновой модели (а) и с применением трехмерной модели, сопряженной в мелководной области с длинноволновой моделью (б)

цунами, распространяющиеся от источника в сторону Курильских островов и в сторону открытого океана, представляют собой диспергирующие волновые группы, насчитывающие по 4–5 волн. Расчет, выполненный с применением традиционной длинноволновой модели, предсказывает одиночные волны, амплитуда которых заметно выше, чем амплитуда волн в диспергирующем пакете.

Второе отличие возмущений, полученных в рамках двух различных моделей, состоит в проявлении упругих колебаний водного слоя, которые хорошо заметны на рис 2б. Эти колебания локализованы в районе глубоководного Курило–Камчатского желоба. Упругие колебания представляют собой низкочастотные гидроакустические волны, сформированные в очаге цунами и захваченные областью больших глубин. Разумеется, это явление не воспроизводится в рамках традиционной длинноволновой модели. Следует заметить, что в реальности низкочастотные гидроакустические волны будут значительно ослаблены из-за преломления в упругое дно (напомним, что в нашей модели дно предполагается абсолютно жестким).

В заключение отметим, что частотные диапазоны гидроакустических волн и гравитационных волн (цунами), образуемых в результате землетрясения, не только различны, но и не пересекаются [4]. В этой связи, если, конечно, пренебречь ролью нелинейных эффектов, цунами и гидроакустические волны можно рассматривать как независимые явления. Следовательно, и описаны они могут быть независимо. Поэтому одним из возможных вариантов дальнейшего развития описанной в этой работе трехмерной модели может быть отказ от учета сжимаемости водного слоя. В этом случае мы теряем общность постановки задачи, но получаем заметную оптимизацию вычислительных процедур (учет сжимаемости накладывает сильные ограничения на выбор шага по времени). Созданный в результате численный код может оказаться весьма эффективным для воспроизведения диспергирующих цунами от момента генерации волн в очаге до выхода на берег.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты № 16–55–50018, №16–05–00053).

- [1] Пелиновский Е.Н. Гидродинамика волн цунами (Н. Новгород: ИПФ РАН, 1996).
- [2] Gistler G.R. Annu. Rev. Fluid Mech. **40**. P. 71. (2008).
- [3] Носов М. А. Известия РАН. Физика атмосферы и океана. **50**, № 3. С. 540 (2014).
- [4] Levin B. W., Nosov M. A. Physics of Tsunamis, Second Edition. (Springer International Publishing AG Switzerland, 2016)
- [5] Nosov M. A., Kolesov S. V. Natural Hazards and Earth System Science. **7**, № 2. P. 243. (2007).

- [6] Stiassnie M. Journal of Engineering Mathematics. **67**, № 1–2. P. 23. (2010).
- [7] Куликов Е. А., Медведев П. П., Ланно С. С. ДАН. **401**, № 4. С. 537. (2005).
- [8] Horrillo J., Kowalik Z., Shigihara Y. Marine Geodesy. **29**, № 3. P. 149. (2006).
- [9] Bolshakova A., Inoue S., Kolesov S., H. Matsumoto, M. Nosov, T. Ohmachi. Russ. J. Earth. Sci. **12**. ES2005. (2011).
- [10] Nosov M. A., Bolshakova A. V., Kolesov S. V. Pure and

- Applied Geophysics. **171**, № 12. P. 3515. (2014).
- [11] *Nosov M. A., Moshenceva A. V., Kolesov S. V.* Pure and Applied Geophysics. **170**, № 9–10. P. 1647. (2013).
- [12] *Носов М. А.* Известия АН. Физика атмосферы и океана. **36**, № 5. С. 718. (2000).
- [13] *Левин Б. В., Кайстренко В. М., Рыбин А. В. и др.* ДАН. **419**, № 1. С. 118. (2008).
- [14] *Носов М. А., Колесов С. В.* Вестн. Моск. ун-та. Сер. 3. Физ. Астрон. № 2. С. 96. (2009). (*Mosc. Univ. Phys. Bull.* 2009. **64**, N 2. P. 208).
- [15] *Nosov M. A., Kolesov S. V.* Pure and applied geophysics. **168**, № 6–7. P. 1223. (2011).

### Three-dimensional numerical model of tsunami waves

S. V. Kolesov<sup>a</sup>, M. A. Nosov<sup>b</sup>

*Department of Marine and Inland Water Physics, Faculty of Physics,  
M.V.Lomonosov Moscow State University, Moscow 119991, Russia  
E-mail: <sup>a</sup>kolesov@ocean.phys.msu.ru, <sup>b</sup>nosov@phys.msu.ru*

The numerical model is described for the simulation of dispersive gravity waves and hydroacoustic waves generated by seismic ocean-bottom motions. The model consists of two dynamically coupled modules. Deep-water module employs 3D equations of linear potential theory of compressible liquid. Shallow-water module employs 2D equations of linear long-wave theory. The numerical model is used for simulation of the 2007 Central Kuril Island tsunami. Manifestations of water compressibility in the vicinity of the tsunami source and phase dispersion of tsunami waves are discussed.

PACS: 91.30.Nw.

Keywords: tsunami generation, tsunami propagation, phase dispersion, water compressibility, numerical simulation.

Received 25.04.2016.

#### Сведения об авторах

1. Носов Михаил Александрович — докт. физ.-мат. наук, доцент, профессор кафедры физики моря и вод суши; тел.: (495) 939–36–98, e-mail: nosov@phys.msu.ru.
2. Колесов Сергей Владимирович — канд. физ.-мат. наук, мл. науч. сотрудник кафедры физики моря и вод суши; тел.: (495) 939–36–98, e-mail: kolesov@ocean.phys.msu.ru.