Анализ точности и сходимости одномерной схемы Йе методом сгущения сеток

Ж. О. Домбровская,[*] А. Н. Боголюбов[†]
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет, кафедра математики
Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2
(Статья поступила 25.04.2016; Подписана в печать 05.05.2016)

Для метода FDTD описана процедура рекуррентного повышения порядка точности, не требующая модификации стандартных уравнений. Метод продемонстрирован на примере задачи о распространении импульса в свободном пространстве. Проведены вычисления с построением апостериорной асимптотически точной оценки погрешности и с повышением порядка точности.

PACS: 02.70.Bf УДК: 519.63
Ключевые слова: схема Йе, метод FDTD, метод Ричардсона, апостериорная асимптотически точная оценка погрешности, повышение порядка точности.

Метод конечных разностей во временной области (FDTD — finite-difference time-domain) является мощным инструментом для решения прикладных задач электродинамики. В его основе лежит дискретизация уравнений Максвелла по конечно-разностной схеме Йе [1, 2]. В случае линейной среды она обладает вторым порядком аппроксимации по пространству и по времени [3], является условно устойчивой [4] и сходится с порядком точности $p = 2$ [5, 6] при выполнении условия Куранта [7].

Одним из способов уменьшения численной дисперсии, возникающей в двумерном и трехмерном случаях, является повышение порядка точности алгоритма. В работах [8, 9] был предложен модифицированный метод FDTD: пространственные производные аппроксимировались центральными разностями с четвертым порядком точности. В данной работе мы предлагаем использовать другой подход, позволяющий производить расчеты с высоким порядком точности и не требующий модификации стандартных уравнений метода FDTD.

Как правило, теоретические априорные оценки точности являются мажорантными. Если для какой-то конкретной задачи и удается построить асимптотическую оценку, то на практике она зачастую оказывается недостижимой, так как для многомерных задач даже современные суперкомпьютеры не всегда могут обеспечить требуемую малость шага. Поэтому теоретического исследования сходимости метода недостаточно. Программа должна, одновременно с получением ответа, находить фактическую оценку его погрешности и выдавать значение эффективного порядка точности $\overline{p}$.

Известно, что погрешность вычислений с помощью стандартного метода FDTD на равномерной сетке около 1.5% при шаге по пространству h не более 1/20 длины волны λ [10]. Такие значения были получены на основании сравнения с точным решением. Однако оно известно далеко не всегда. С помощью метода сгущений сетки (метода Ричардсона) [11] можно построить апостериорную асимптотически точную оценку погрешности, не требующую знания точного решения и его производных. Для этого достаточно из теоретического анализа разностной схемы установить значение p.

Решение на более подробной сетке может быть экстраполяционно уточнено в тех узлах, которые совпадают с узлами самой грубой из сеток. Результат такого уточнения, по своей сути, является результатом расчета методом более высокого порядка точности $p+2$. Процедуру уточнения можно сделать рекуррентной [12, 13], что позволяет повысить порядок точности результата вычислений. Формулы m-ого уточнения на k раз сгущенной сетке имеют следующий вид:

$$R_k^{m-1} = \frac{\nu_k^{m-1} - \nu_{k-1}^{m-1}}{r^{p+2(m-1)} - 1};$$
$$\nu_k^m = \nu_k^{m-1} + R_k^{m-1}; \tag{1}$$
$$\overline{p}_k^{m-1} = \frac{\lg(R_{k-1}^{m-1}/R_k^{m-1})}{\lg r}.$$

Здесь R — оценка погрешности по Ричардсону, ν — сеточное решение, $r = 2$ — коэффициент сгущения сетки. Отметим, что такие вычисления требуют лишь небольшого числа арифметических операций, но при этом позволяют существенно повысить порядок точности. Каждое последующее сгущение требует повышения гладкости решения на две единицы.

В качестве теста рассмотрим задачу о распространении в свободном пространстве электромагнитного импульса, возбужденного излучающей линией с заданной плотностью тока. На рис. 1 представлены погрешности сеточного решения по Ричардсону для схемы Йе (верхняя линия) и для рекуррентных уточнений (1) в зависимости от числа узлов сетки в двойном логарифмическом масштабе. Порядок точности указан около кривых.

Сходимости с порядком p соответствует прямая линия с наклоном $\operatorname{tg}\alpha = -p$. Хорошо видно, что при увеличении N значения погрешностей для схемы Йе

[*]E-mail: dombrovskaya@physics.msu.ru
[†]E-mail: bogan7@yandex.ru

асимптотически выходят на прямую линию с наклоном -2. Поэтому построенные оценки являются достоверными и строго обоснованными. На достаточно подробных сетках погрешности решений, полученных в результате рекуррентных уточнений, выходят на фон ошибок округления. Этот фон тем выше, чем больше N, поэтому избыточно подробные сетки выбирать не следует.

В данном примере уже в случае восьмого порядка регулярный участок кривой сходимости содержит всего 3 точки. По этой причине уверенно отследить поведение эффективного порядка точности не удается. Поэтому целесообразно ограничиться шестым порядком точности. При $h = \lambda/20$ он дает относительную погрешность 2.32×10^{-7}, что на 5 порядков меньше, чем погрешность, указанная в [13] (показана белым маркером).

Полученные результаты позволяют не только найти численное решение с высокой точностью, но и доказать существование единственного точного решения задачи в том классе функций, для которых исследовалась аппроксимация (в данном случае, бесконечное число раз дифференцируемых). Это можно сделать, опираясь на теоремы из [14, 15].

В данной работе мы ограничились одномерной задачей. Поскольку в методе Ричардсона сгущения производятся одновременно по всем переменным, то описанная процедура повышения порядка точности вычислений элементарно переносится на двумерный и трехмерный случаи.

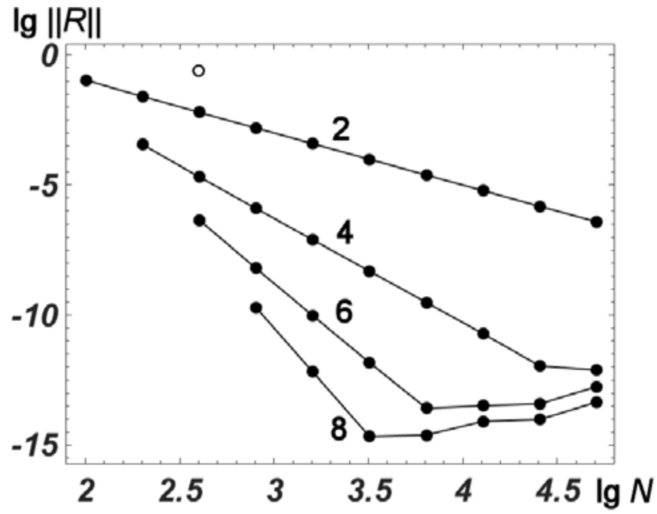

Рис. 1: Погрешности при сгущении сеток и рекуррентных уточнениях. Цифры около линий — порядок точности, белый маркер — значение погрешности из работы [10]

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты 15-01-03524, 16-31-00418).

[1] *Yee K. S.* IEEE Transactions on Antennas and Propagation. **14**. P. 302. (1966).
[2] *Taflove A., Hagness S. C.* Computational Electrodynamics: the Finite Difference Time-Domain Method. (Norwood (MA), 2005).
[3] *Taflove A., Brodwin M. E.* IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques. **23**. P. 623. (1975).
[4] *Kunz K. S., Luebbers R. J.* The Finite Difference Time Domain Method for Electromagnetics. (NY, 1993).
[5] *Monk P.* Journal of Computational and Applied Mathematics. **47**. P. 101. (1993).
[6] *Liu Y.* Journal of Computational Physics. **124**. P. 396. (1996).
[7] *Courant R., Friedrichs K., Lewy H.* Mathematische Annalen. **100**. P. 32. (1928).
[8] *Hadi M. F., Piket-May M.* IEEE Transactions on Antennas and Propagation. **45**. P. 254. (1997).
[9] *Lan K., Liu Y., Lin W.* IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility. **41**. P. 199. (1999).
[10] *Taflove A., Umashankar K. R.* Proceedings of the IEEE. **77**. P. 682. (1989).
[11] *Richardson L. F.* Philosophical Transactions of the Royal Society A. **226**. P. 299. (1927).
[12] *Калиткин Н. Н., Альшин А. Б., Альшина Е. А., Рогов Б. В.* Вычисления на квазиравномерных сетках. (М., 2005).
[13] *Калиткин Н. Н., Альшина Е. А.* Численные методы. Кн. 1. (М., 2013).
[14] *Калиткин Н. Н., Корякин П. В.* Численные методы. Кн. 2. (М., 2013).
[15] *Рябенький В. С., Филиппов А. Ф.* Об устойчивости разностных уравнений. (М., 1956).

Accuracy and convergence analysis of 1D Yee's Scheme by Mesh Thickening Method

Zh. O. Dombrovskaya[a], **A. N. Bogolyubov**[b]
Department of Mathematics, Faculty of Physics,
M.V.Lomonosov Moscow State University, Moscow 119991, Russia
E-mail: [a]dombrovskaya@physics.msu.ru, [b]bogan7@yandex.ru

For the FDTD method, we describe an order of accuracy increasing procedure which does not require any modification of the standard equations. The method is demonstrated on a problem of the pulse propagation in free space. Calculations with obtaining a posteriori asymptotically precise estimate and increasing the order of accuracy up to six are carried out.

PACS: 02.70.Bf
Keywords: Yee's Scheme, FDTD method, Richardson method, a posteriori asymptotically precise estimate, increasing of the order of accuracy.
Received 25.04.2016.

Сведения об авторах

1. Домбровская Жанна Олеговна — аспирант; тел.: (495) 939-10-33, e-mail: dombrovskaya@physics.msu.ru.
2. Боголюбов Александр Николаевич — докт. физ.-мат. наук, заслуженный профессор, профессор; тел.: (495) 939-10-33, e-mail: bogan7@yandex.ru.