Сингулярность электромагнитного поля в окрестности диэлектрического ребра в задачах дифракции на телах сложной формы

А.Н. Боголюбов,* И.Е. Могилевский†
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет, кафедра математики
Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2
(Статья поступила 25.04.2016; Подписана в печать 05.05.2016)

В работе рассматривается задача об исследовании поведения электромагнитного поля окрестности диэлектрического ребра. Строится асимптотическое представление электромагнитного поля задачи дифракции в окрестности угловой точки линии разрыва диэлектрической проницаемости. Из полученного представления следует, что в окрестности угловой точки линии разрыва диэлектрической проницаемости главную особенность имеет именно электрическое поле. Продольная компонента ограничена в окрестности угловой точки, а поперечная имеет степенную особенность, причем вид функции, описывающей особенность, и показатели степени соответствуют полученному ранее для скалярного случая.

PACS: 02.30.Jr 41.20.Jb УДК: 519.634
Ключевые слова: особенность электромагнитного поля в окрестности ребра, диэлектрический клин.

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время весьма актуальными являются задачи дифракции электромагнитного поля на сложных диэлектрических структурах при наличии ребер на их границах. Хорошо известно, что наличие ребер и кромок приводит к появлению сингулярности электромагнитного поля в их окрестности [1]. В задачах расчета волноведущих систем присутствие угловых точек у границы и у линий разрыва диэлектрической проницаемости в поперечном сечении волновода приводит к появлению особенностей у электромагнитного поля в окрестности особой точки границы или неоднородности заполнения [2–8]. Это существенно усложняет применение численных методов для расчета подобных систем.

Одним из весьма эффективных способов преодоления этих проблем является выделение особенности решения в явном виде, то есть построение асимптотического представления электромагнитного поля в окрестности диэлектрического ребра. При этом существенно используются результаты по асимптотике решения эллиптических краевых задач, представленные в работе В. А. Кондратьева [4], а также С. А. Назарова и Б. А. Пламеневского [3].

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается плоская задача дифракции электромагнитной волны на диэлектрической клиновидной структуре (зависимость от координаты z отсутствует). Предполагается, что электромагнитное поле имеет гармоническую зависимость от времени вида $e^{-i\omega t}$:

$$\mathbf{E}(x,y,z,t)=\mathbf{E}(x,y)e^{-i\omega t},$$
$$\mathbf{H}(x,y,z,t)=\mathbf{H}(x,y)e^{-i\omega t}.$$

Магнитная проницаемость среды $\mu\equiv 1$. Диэлектрическая проницаемость ε — кусочно непрерывная скалярная вещественная функция.

Полное поле удовлетворяет системе уравнений Максвелла

$$\begin{cases} rot\,\mathbf{E}=ik\mathbf{H},\\ rot\,\mathbf{H}=-ik\varepsilon\mathbf{E},\end{cases} \tag{1}$$

где $k=\dfrac{\omega}{c}$ — волновой вектор, и условиям сопряжения на границе раздела диэлектриков

$$\begin{aligned} &(\mathbf{H}\cdot\mathbf{n})|_C=0, \quad [(\mathbf{H}\times\mathbf{n})]|_C=0,\\ &[(\varepsilon\mathbf{E}\cdot\mathbf{n})]|_C=0, \quad [(\mathbf{E}\times\mathbf{n})]|_C=0,\end{aligned} \tag{2}$$

где C — плоскость разрыва диэлектрической проницаемости, $\mathbf{n}$ — вектор нормали.

Полное поле ищется в виде суммы поля падающей плоской волны и дифрагированного поля

$$\mathbf{E}=\mathbf{E}_0+\tilde{\mathbf{E}}, \quad \mathbf{H}=\mathbf{H}_0+\tilde{\mathbf{H}}.$$

Для падающего поля рассматриваются два типа поляризации:

$$\mathbf{E}_0=\left\{0;0;E_1e^{ikr\cos\phi}\right\}, \quad \mathbf{H}_0=\left\{0;0;H_1e^{ikr\cos\phi}\right\}.$$

Для компонент дифрагированного поля ставятся условия излучения Зоммерфельда на бесконечности.

Вводится цилиндрическая система координат, ось Oz которой направлена вдоль ребра клина. Для компонент полного электрического поля из (1) можно

*E-mail: bogan7@yandex.ru
†E-mail: mogilev@phys.msu.ru

получить следующую задачу:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\phi}\left\{\frac{1}{r}\frac{\partial E_r}{\partial\phi}-\frac{\partial}{\partial r}\left(rE_\phi\right)\right\}=-k^2\varepsilon E_r,\\
&\frac{\partial}{\partial r}\left\{\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(rE_\phi\right)-\frac{1}{r}\frac{\partial E_r}{\partial r}\right\}=-k^2\varepsilon E_\phi,\\
&\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial E_z}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 E_z}{\partial\phi^2}=-k^2\varepsilon E_z,
\end{aligned}$$

с условиями сопряжения на поверхностях разрыва диэлектрической проницаемости $\left[\varepsilon E_\phi\right]|_C=0,\ \left[E_r\right]|_C=0$, $\left[E_z\right]|_C=0$ и дополнительным условием

$$div\left(\varepsilon\mathbf{E}\right)=0,\Rightarrow\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\varepsilon E_r\right)+\frac{1}{r}\frac{\partial\left(\varepsilon E_\phi\right)}{\partial\phi}=0. \qquad (3)$$

2. ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЯ

Чтобы провести детальное исследование поведения электромагнитного поля в окрестности ребра диэлектрического клина, данная задача сначала рассматривается на всей плоскости с бесконечным диэлектрическим клином (диэлектрическая проницаемость берется кусочно-постоянной). В дальнейшем использование срезающей функции позволяет свести задачу дифракции на конечном объекте к задаче на всей плоскости с бесконечным клином. После преобразований будем иметь:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 E_r}{\partial\phi^2}-\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial E_\phi}{\partial\phi}\right)=-\frac{2\alpha}{r^2}\frac{\partial u}{\partial\phi}(r,0)\delta(\phi)+\frac{2\alpha}{r^2}\frac{\partial u}{\partial\phi}(r,0)\delta(\phi-\omega_0)-\\
&-\frac{2\alpha}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\varepsilon E_\phi(r,0)\right)\delta(\phi)+\frac{2\alpha}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\varepsilon E_\phi(r,\omega_0)\right)\delta(\phi-\omega_0)+f_r(r,\phi),\\
&\frac{\partial}{\partial r}\left\{\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(rE_\phi\right)-\frac{1}{r}\frac{\partial E_r}{\partial r}\right\}=f_\phi(r,\phi),\\
&\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial E_z}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 E_z}{\partial\phi^2}=f_z(r,\phi),
\end{aligned}\qquad (4)$$

где $\alpha=\dfrac{\varepsilon_2-\varepsilon_1}{\varepsilon_2+\varepsilon_1}$, $\dfrac{\partial u}{\partial\phi}\equiv\dfrac{\partial E_r}{\partial\phi}-k^2r\varepsilon E_\phi$, $f_r(r,\phi)=-k^2\varepsilon E_r$, $f_\phi(r,\phi)=-k^2\varepsilon E_\phi$, $f_z(r,\phi)=-k^2\varepsilon E_z$. Дополнительное условие (3) принимает вид:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rE_r)+\frac{1}{r}\frac{\partial E_\phi}{\partial\phi}-\frac{2\alpha}{r}\left(\varepsilon E_\phi(r,0)\right)\delta(\phi)+\frac{2\alpha}{r}\left(\varepsilon E_\phi(r,\omega_0)\right)\delta(\phi-\omega_0)=0.$$

Чтобы характеризовать особенность решения в окрестности угловой точки линии разрыва диэлектрической проницаемости и на бесконечности, по аналогии с тем, как это сделано в [9], введем пространство V_γ^l с нормой

$$\|u\|^2_{V_\gamma^l}=\sum_{j+k\le l}\left[\int_0^{\omega_o}d\phi\int_0^\infty r^{2(\gamma-l+j)}\left|\frac{\partial^{j+k}u}{\partial r^j\partial\phi^k}\right|^2rdr+\int_{\omega_o}^{2\pi}d\phi\int_0^\infty r^{2(\gamma-l+j)}\left|\frac{\partial^{j+k}u}{\partial r^j\partial\phi^k}\right|^2rdr\right],$$

где $l\ge 0$ — целое, γ — любое действительное число. Отметим, что $\left(f(M)\in L_2\leftrightarrow f(M)\in V_0^0\right)$.

Пусть функции $E_r(r,\phi),\ E_\phi(r,\phi),\ E_z(r,\phi)\in V_\gamma^l$. Следуя [9], проведем замену переменных $\tau=\ln\frac{1}{r}$, домножим уравнения (4) на $e^{-2\tau}$ и сделаем преобразование Фурье по τ

$$\widehat{u}(\lambda,\phi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}u(\tau,\phi)e^{-i\lambda\tau}d\tau.$$

Система (4) и дополнительное условие примут вид

$$\begin{aligned}
&\tfrac{1}{r^2}\tfrac{\partial^2\hat{E}_r}{\partial\phi^2}(\lambda,\phi)-(1-i\lambda)\tfrac{\partial\hat{E}_\phi}{\partial\phi}(\lambda,\phi)=-2\alpha(1-i\lambda)\varepsilon\hat{E}_\phi(\lambda,0)\delta(\phi)+\\
&+2\alpha(1-i\lambda)\varepsilon\hat{E}_\phi(\lambda,\omega_0)\delta(\phi-\omega_0)-2\alpha\tfrac{\partial\hat{u}}{\partial\phi}(\lambda,0)\delta(\phi)+2\alpha\tfrac{\partial\hat{u}}{\partial\phi}(\lambda,\omega_0)\delta(\phi-\omega_0)+\hat{F}_r(\lambda,\phi),\\
&-\left(\lambda^2+1\right)\hat{E}_\phi(\lambda,\phi)+(1+i\lambda)\tfrac{\partial\hat{E}_r}{\partial\phi}(\lambda,\phi)=\hat{F}_\phi(\lambda,\phi),\\
&-\lambda^2\hat{E}_z(\lambda,\phi)+\tfrac{1}{r^2}\tfrac{\partial^2\hat{E}_z}{\partial\phi^2}(\lambda,\phi)=\hat{F}_z(\lambda,\phi),\\
&(1-i\lambda)\hat{E}_r(\lambda,\phi)+\tfrac{\partial\hat{E}_\phi}{\partial\phi}(\lambda,\phi)=2\alpha\varepsilon\hat{E}_\phi(\lambda,0)\delta(\phi)-2\alpha\varepsilon\hat{E}_\phi(\lambda,\omega_0)\delta(\phi-\omega_0).
\end{aligned}$$

Решение данной системы может быть построено с помощью функции Грина оператора

$$L\widehat{u} = -\lambda^2 \widehat{u}(\lambda,\phi) + \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}\widehat{u}(\lambda,\phi)$$

при периодических граничных условиях, которая может быть построена явно

$$G(\phi,\xi) = \frac{-1}{2\lambda\, sh\pi\lambda} ch\left(\pi\lambda - \lambda|\xi-\phi|\right).$$

Решение системы для компоненты $\hat{E}_r(\lambda,\phi)$ примет вид

$$\hat{E}_r(\lambda,\phi) = -2\alpha\frac{\partial \hat{u}}{\partial \phi}(\lambda,0)G(\phi,0) + 2\alpha\frac{\partial \hat{u}}{\partial \phi}(\lambda,\omega_0)G(\phi,\omega_0) + \int_0^{2\pi} G(\phi,\xi)\hat{F}_r(\lambda,\xi)d\xi, \tag{5}$$

Аналогично тому, как это проделано в [8] для скалярного случая, из уравнения (5) получим систему линейных алгебраических уравнений относительно $\frac{\partial \hat{u}}{\partial \phi}(\lambda,0)$ и $\frac{\partial \hat{u}}{\partial \phi}(\lambda,\omega_0)$, решая которую найдем

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \hat{u}}{\partial \phi}(\lambda,0) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{sh\pi(\lambda+i) - \alpha sh(\pi-\omega_0)(\lambda+i)} + \frac{1}{sh\pi(\lambda+i) + \alpha sh(\pi-\omega_0)(\lambda+i)}\right] \times \\
&\times \Big\{\alpha sh\left[(\pi-\omega_0)(\lambda+i)\right] k^2\varepsilon \hat{E}_\phi(\lambda+i,\omega_0) - \alpha sh\left[(\pi-\omega_0)(\lambda+i)\right] \textstyle\int_0^{2\pi} G'{}_\phi(\omega_0,\xi)\hat{F}_r(\lambda,\xi)d\xi - \\
&- sh\pi(\lambda+i)k^2\varepsilon\hat{E}_\phi(\lambda+i,0) + sh\pi(\lambda+i) \textstyle\int_0^{2\pi} G'{}_\phi(0,\xi)\hat{F}_r(\lambda,\xi)d\xi\Big\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \hat{u}}{\partial \phi}(\lambda,\omega_0) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{sh\pi(\lambda+i) - \alpha sh(\pi-\omega_0)(\lambda+i)} + \frac{1}{sh\pi(\lambda+i) + \alpha sh(\pi-\omega_0)(\lambda+i)}\right] \times \\
&\times \Big\{\alpha sh\left[(\pi-\omega_0)(\lambda+i)\right] k^2\varepsilon \hat{E}_\phi(\lambda+i,0) - \alpha sh\left[(\pi-\omega_0)(\lambda+i)\right] \textstyle\int_0^{2\pi} G'{}_\phi(0,\xi)\hat{F}_r(\lambda,\xi)d\xi - \\
&- sh\pi(\lambda+i)k^2\varepsilon\hat{E}_\phi(\lambda+i,\omega_0) + sh\pi(\lambda+i) \textstyle\int_0^{2\pi} G'{}_\phi(\omega_0,\xi)\hat{F}_r(\lambda,\xi)d\xi\Big\},
\end{aligned}$$

Тем же методом, что использован в работе [9] для выделения особенности электромагнитного поля в окрестности ребра в волноводе, удается получить следующее представление радиальной компоненты электрического поля задачи дифракции в окрестности ребра диэлектрического клина:

$$\begin{aligned}
&E_r(r,\phi) = \chi \textstyle\sum_{0<\nu_k^{(1)}<1} r^{\nu_k^{(1)}-1}\left\{C_k^{(1)}\cos\left[(\pi-\phi)\,\nu_k^{(1)}\right] + D_k^{(1)}\cos\left[(\pi-|\omega_0-\phi|)\,\nu_k^{(1)}\right]\right\} + \\
&+\chi \textstyle\sum_{0<\nu_k^{(2)}<1} r^{\nu_k^{(2)}-1}\left\{C_k^{(2)}\cos\left[(\pi-\phi)\,\nu_k^{(2)}\right] + D_k^{(2)}\cos\left[(\pi-|\omega_0-\phi|)\,\nu_k^{(2)}\right]\right\} + \Re(r,\phi).
\end{aligned}$$

где $\nu_k^{(1)}$ и $\nu_k^{(2)}$ — решения уравнений

$$\begin{aligned}
\sin\pi\nu_k^{(1)} - \alpha\sin\left(\pi\nu_k^{(1)} - \nu_k^{(1)}\omega_0\right) = 0,\\
\sin\pi\nu_k^{(2)} + \alpha\sin\left(\pi\nu_k^{(2)} - \nu_k^{(2)}\omega_0\right) = 0,
\end{aligned}$$

(кроме $\nu_k = 0$), $\chi(r) = \begin{cases} 1, & r \le d/2, \\ 0, & r > d, \end{cases}$ $\chi(r) \in C^\infty$ — срезающая функция, $\Re(r,\phi)$ — гладкая часть решения.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Данное представление поля в окрестности ребра диэлектрического клина может повысить точность математического моделирования дифракции электромагнитного поля на сложных телах содержащих диэлектрические клиновидные структуры. Знание точного вида особенности электромагнитного поля позволяет точно приблизить сингулярную часть решения и свести задачу к аппроксимации гладкой части, что дает возможность получить скорость сходимости приближенного решения к точному, соответствующую гладкому случаю.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты 15-01-03524-а, 16-01-00690-а).

[1] *Свешников А. Г., Могилевский И. Е.* Избранные математические задачи теории дифракции. (М.: Физический факультет МГУ, 2012).
[2] *Бирман М. Ш., Соломяк М. З.* УМН. **42**, вып.6. С. 61. (1987).
[3] *Назаров С. А., Пламеневский Б. А.* Эллиптические задачи в областях с кусочно–гладкой границей. (М.: Наука, 1991).
[4] *Кондратьев В. А.* Труды Московского Математического Общества. **16**. С. 227. (1967).
[5] *Боголюбов А. Н., Делицын А. Л., Могилевский И. Е., Свешников А. Г.* Журнал радиоэлектроники (электронный журнал). http: jre.cplire.ru. № 8. (2001).
[6] *Боголюбов А. Н., Делицын А. Л., Могилевский И. Е., Свешников А. Г.* Радиотехника и электроника. **48**, № 7. С. 787. (2003).
[7] *Гринберг Г. А.* Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений. (М.: Изд-во АН СССР, 1948).
[8] *Боголюбов А. Н., Могилевский И. Е.* Ж. вычисл. матем. и матем. физ. **51**, № 12. С. 2253. (2011).
[9] *Боголюбов А. Н., Могилевский И. Е., Свешников А. Г.* Ж. вычисл. матем. и матем. физ. **55**, № 3. С. 446. (2015).

Electromagnetic Field Singularity at the vicinity of dielectric edge in diffraction problems on the complicated shape bodies

A.N. Bogolyubov[a], I.E. Mogilevskiy[b]

Department of Mathematics Physics, Faculty of Physics,
M.V.Lomonosov Moscow State University, Moscow 119991, Russia
E-mail: [a]bogan7@mail.ru, [b]mogilev@phys.msu.ru

The behavior of the electromagnetic field near a corner point of a line of discontinuity of the permittivity is studied. Using asymptotic methods, we construct an asymptotic representation of the electromagnetic near a corner point of a line of discontinuity of permittivity. The representation obtained imply that, in the vicinity of the corner point of the line of discontinuity of permittivity, the main singularity is in the electric field. The longitudinal component itself is bounded in the neighborhood of the corner point, and its derivative has a power singularity; the form of the function describing the singularity is as that in the scalar case, considered earlier.

PACS: 02.30.Jr 41.20.Jb
Keywords: a corner point of a line of discontinuity of permittivity, an asymptotic representation of the electromagnetic near a corner point.
Received 25.04.2016.

Сведения об авторах

1. Боголюбов Александр Николаевич — докт. физ.-мат. наук, профессор, профессор; тел.: (495) 939–10–33, e-mail: bogan7@mail.ru.
2. Могилевский Илья Ефимович — канд. физ.-мат. наук, доцент. тел.: (495) 939–13–51, e-mail: mogilev@phys.msu.ru.