

Обучение школьников методам минимизации в ходе выполнения исследовательских работ

Е. А. Михайлов*

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет, кафедра математики
Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2
(Статья поступила 25.04.2016; Подписана в печать 05.05.2016)

Методы минимизации различных функционалов широко используются в физических задачах. Современная компьютерная техника позволяет применять их даже школьникам старших классов. На примере задачи об аппроксимации зависимости сопротивления от температуры для терморезисторов школьникам был изложен метод наименьших квадратов. Изученный материал был использован для выполнения исследовательских работ, представленных на различных конференциях и конкурсах.

PACS: 01.40.E-

УДК: 372.853

Ключевые слова: методы минимизации, исследовательские работы.

Большое количество физических и технических задач приводят к необходимости нахождения минимумов некоторых функций или функционалов. Например, свет, распространяющийся между двумя точками, стремится сделать это за наименьшее время — следствием этого является закон преломления. Уравнение движения материальной точки может быть получено из так называемого принципа наименьшего действия: движение происходит так, чтобы действие принимало наименьшее значение. В ряде технических задач приходится стремиться к тому, чтобы израсходовать возможно меньше денежных средств, электроэнергии и т.п. При минимизации соответствующих функционалов, как правило, применяются методы математического и функционального анализа, теории оптимизации.

Приведенные выше примеры относятся к университетскому курсу физики или, в крайнем случае, к старшим классам школы и поэтому может показаться, что школьник может обойтись и без их использования. Однако уже с 7 класса школьники проводят различные опыты: изучают движение тел, измеряют силы и т.д. Как правило, идея о том, что все измерения имеют определенную погрешность, не вызывает у них больших затруднений. Однако, если им нужно по нескольким измерениям двух взаимосвязанных величин (например, силы упругости и величины деформации) определить характер их зависимости, это ставит их в тупик. В случае линейной зависимости можно обойтись рекомендацией «на глаз» провести прямую на графике так, чтобы половина точек лежала выше прямой, а половина — ниже. Тем не менее, сразу понятно, что такой метод является неточным.

В университетском курсе и в научных исследованиях обычно используется так называемый метод наименьших квадратов. Пусть мы измеряем две вели-

чины (x и y), при этом мы пытаемся подобрать зависимость одной от другой в виде $y = f(p_1, p_2, \dots, p_n, x)$, где p_1, p_2, \dots, p_n — некоторые коэффициенты. В таком случае на каждом шаге мы вычисляем величину ошибки $\Delta_i = y_i - f(p_1, p_2, \dots, p_n, x_i)$, где x_i и y_i — результаты измерений. После этого составляется функционал $I = \Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \dots + \Delta_N^2$, который в дальнейшем минимизируется по переменным p_1, p_2, \dots, p_n [1]. Для простых зависимостей (например, линейных) есть стандартные алгоритмы нахождения соответствующих значений коэффициентов, встроенные в такие программы, как Microsoft Office Excel, OriginLab и т.д. Однако с одной стороны, самостоятельное освоение метода наименьших квадратов несет в себе важную воспитательную задачу, с другой — даже в школьной лаборатории можно найти функции, которые выходят за рамки стандартных примеров, «защитых» в такие программы.

Автором с учениками 7–9 классов средней общеобразовательной школы № 1240 (до 2014 года — школа № 96) г. Москвы проводились исследовательские работы, посвященные изучению свойств так называемых терморезисторов — проводников, сопротивление которых зависит от температуры. В качестве примеров таких объектов использовались датчики температуры охлаждающей жидкости легковых автомобилей: их сопротивление уменьшается при нагревании. Школьники провели эксперимент и получили, что зависимость сопротивления от температуры крайне плохо приближается линейной. Было предложено подбирать ее в виде:

$$R(t) = A/t + Bt + C$$

где t — температура по шкале Цельсия, R — сопротивление, A , B и C — постоянные коэффициенты, зависящие от конкретного датчика. Задача школьников состояла в вычислении их значений.

Для этого ими была написана компьютерная программа на языке Visual Basic, которая перебирала значения коэффициентов из заданного диапазона и вы-

*E-mail: ea.mikhajlov@physics.msu.ru

числяла для каждого из них суммарную квадратичную ошибку I . После этого она определяла, для каких коэффициентов получается наименьшая величина ошибки. Для данных значений выводился график, чтобы можно было проверить факт визуального соответствия (рис. 1).

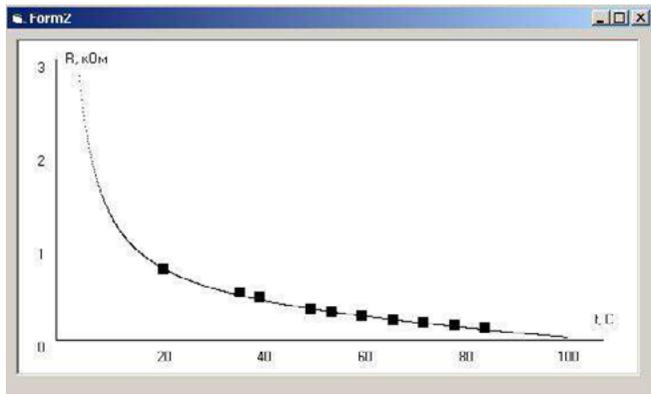


Рис. 1: Скриншот составленной школьниками программы

Другая группа школьников вычисляла модули ошибок: $\delta_i = y_i - f(p_1, p_2, \dots, p_n, x_i)$. После этого составлялся функционал $J = \max(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_N)$, для которого аналогичным образом искалось минимальное значение. Школьники назвали эту процедуру «методом наименьших максимумов» (по аналогии с методом наименьших квадратов). С математической точки зрения, если метод наименьших квадратов соответствует поиску минимума с использованием нормы пространства L_2 (функции с интегрируемым квадратом), указанный «метод наименьших максимумов» аналогичен поиску минимума с использованием нормы пространства C (непрерывные функции) [2]. С его помощью также были получены значения коэффициентов, хорошо описывающие результаты эксперимента.

Кроме того, изучался вопрос о том, можно ли заменить один терморезистор (сопротивление которого описывается функцией $R_1(t)$) другим, имеющим отличающуюся зависимость сопротивления от температуры $R_2(t)$. (Подобные проблемы иногда возникают в технике в том случае, когда детали с нужными характеристиками нет в наличии.) Для этого было предложено подсоединить параллельно к терморезистору постоянное сопротивление R_0 (рис. 2). Эквивалентное сопротивление подобной схемы будет равно:

$$R_{\Sigma}(t) = \frac{R_0 R_2(t)}{R_0 + R_2(t)}.$$

После этого составлялась разность между данными сопротивлениями для нескольких значений температуры: $D_i = R_{\Sigma}(t_i) - R_1(t_i)$. Для данных разностей точно также, как и в прошлой задаче, составлялась сумма квадратов $K = D_1^2 + D_2^2 + \dots + D_N^2$ и проводилась ее минимизация. Для нескольких пар терморезисторов, изученных школьниками ранее, были найдены соответствующие значения дополнительных сопротивлений R_0 , которые позволяют смоделировать работу одного устройства с помощью другого.

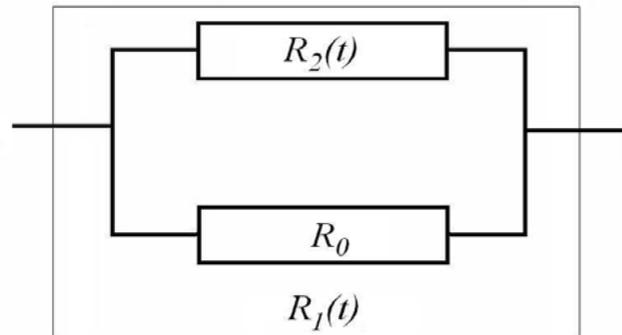


Рис. 2: Моделирование работы одного терморезистора с помощью другого

Таким образом, можно отметить, что хотя школьники не знают «взрослых» методов минимизации функционалов, персональный компьютер позволяет им решать задачи на поиск минимумов, связанных с ошибками в физических измерениях. Кроме того, подобные методы были использованы при выполнении проектных и исследовательских работ технико-экономического плана (например, при проектировании маршрутов автобуса, где минимизировался убыток от работы маршрута [3]). Проведенные работы представлялись на ряде конференций и конкурсов проектно-исследовательских работ школьников («Форум молодых исследователей», «Технопарк», «Система приоритетов», «Исследуем и проектируем», «От атома до галактики») и были отмечены грамотами. В настоящее время проводится работа по организации работ сходной тематики в рамках недавно организованного факультатива по компьютерному моделированию для школьников на Физическом факультете МГУ.

- [1] Митин И.В., Русаков В.С. Анализ и обработка экспериментальных данных. (М., 2012).
 [2] Волков В.Т., Ягола А.Г. Интегральные уравнения. Вариационное исчисление. Курс лекций. (М., 2009).
 [3] Михайлов Е.А. Задачи оптимизации в школе. Практи-

ческие методики в области основного и дополнительного образования. (2014). Библиотека «МГУ — школе». <http://lib.teacher.msu.ru/>

Teaching of minimizing methods while doing research works in secondary school**E. A. Mikhailov**

*Department of Mathematics, Faculty of Physics,
M.V.Lomonosov Moscow State University, Moscow 119991, Russia
E-mail: ea.mikhajlov@physics.msu.ru*

Minimizing methods for different functionals is widely used in physical problems. Modern computers let use them even the pupils of secondary school. We have described them the least square method. As an example we used a problem of approximation the resistance temperature dependence for the thermistors. The studied material was used for doing research works that were presented on different conferences and competitions.

PACS: 01.40.E-

Keywords: minimizing methods, school research works

Received 25.04.2016.

Сведения об авторе

Михайлов Евгений Александрович — ведущий программист; тел.: (495) 939–10–33, e-mail: ea.mikhajlov@physics.msu.ru.