

Расчет собственных мод трехззорного резонатора со скругленными углами

А. В. Шкитин,^{*} А. Н. Боголюбов,[†] А. И. Ерохин[‡]

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет, кафедра математики
Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2

Рассматривается алгоритм, описывающий нахождение собственных мод трехззорного аксиально-симметричного резонатора клистрона. Для описания структуры резонатора используется метод почти R-функций Рвачева. Для расчетов используется метод конечных элементов с использованием атомарных функций в качестве базисных, что обеспечивает быструю сходимость и высокую эффективность алгоритма.

PACS: 41.90.+e

УДК: 51-73

Ключевые слова: R-функции, атомарные функции, клистрон.

В данной работе рассматривается аксиально-симметричный трехззорный резонатор. Резонаторы подобного типа находят широкое применение при конструировании усилительных клистронов с распределённым взаимодействием в миллиметровом и субмиллиметровом диапазоне длин волн [1].

В общем случае поперечное сечение рассматриваемого резонатора может иметь достаточно сложную форму, поэтому в данной работе для его описания применяется метод R-функций, разработанный Рвачевым В. Л. [2,3]. Данный метод позволяет построить такую числовую функцию, которая равна нулю на границе области сложной геометрии [4].

Ранее [5] для описания сечения резонатора использовалась структура с прямыми углами. Для этой структуры были найдены собственные моды, по которым затем построены компоненты электрического поля E_z и E_r . Из рис. 1 видно, что поля в углах имеют особенности, что хорошо согласуется с физикой данного процесса [6]. Это приводит к тому, что вблизи угловых точек происходят накопление энергии и пробой, во избежание чего на практике углы скругляют. В данной работе скругления реализовываются с помощью усложнения метода R-функций. Это позволило значительно снизить величину электрического поля в угловых областях.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим трехззорный цилиндрический резонатор с идеально проводящей поверхностью, поперечное сечение которого изображено на рис. 2:

Электромагнитные колебания в рассматриваемом ре-

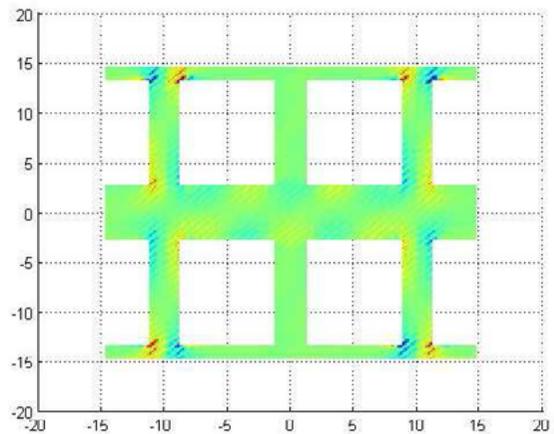


Рис. 1: Распределение компоненты E_r в случае структуры с прямыми углами.

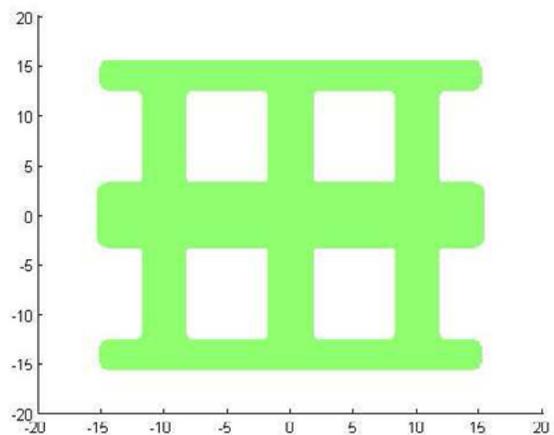


Рис. 2: Поперечное сечение трехззорного резонатора.

^{*}E-mail: alshkit@yandex.ru

[†]E-mail: bogan7@yandex.ru

[‡]E-mail: forlector@mail.ru

зонаторе описываются системой уравнений Максвелла:

$$\begin{cases} \operatorname{rot}\mathbf{H} = -ik\mathbf{E}, \\ \operatorname{rot}\mathbf{E} = ik\mathbf{H}, \\ \mathbf{H} = 0, \\ \mathbf{E} = 0, \end{cases} \quad (1)$$

где k — волновой вектор, \mathbf{E} и \mathbf{H} — вектора электрической и магнитной напряженности поля.

На границе резонатора для касательной компоненты поля \mathbf{E} выполняется условие Дирихле:

$$E_\tau = 0.$$

Представим поля \mathbf{E} и \mathbf{H} с помощью поляризационного потенциала Π :

$$\mathbf{E} = \operatorname{grad} \operatorname{div}\Pi + k^2\Pi, \quad (2)$$

$$\mathbf{H} = -ik\operatorname{rot}\Pi, \quad (3)$$

где все компоненты потенциала, кроме направленной вдоль оси z , равны 0. Проведя элементарные преобразования, получим уравнение Гельмгольца с граничными условиями Дирихле:

$$\Delta\Pi + k^2\Pi = 0, \quad (4)$$

$$\Pi|_{\partial\Omega} = 0. \quad (5)$$

Разделяя переменные и проведя преобразование, аналогичное [7], получим следующую задачу:

Найти такие значения k^2 и функции $u \in H_1^0(\Omega)$, которые удовлетворяют следующему уравнению для любых функций $v \in H_1^0(\Omega)$:

$$\int_{\Omega} r(\nabla u, \nabla v) d\sigma - \lambda^2 \int_{\Omega} \frac{uv}{r} d\sigma - k^2 \int_{\Omega} ruvd\sigma = 0. \quad (6)$$

2. ЧИСЛЕННАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ

Решение задачи представим в виде:

$$u = U\omega, \quad (7)$$

где ω — R-функция Рвачева. Для ее построения используются простейшие операции из системы R_α , описанные в [3].

Для того чтобы избежать накопления энергии в угловых точках резонатора и, как следствие, пробоев, и выхода резонатора из строя, углы скругляют. В то же время в наиболее часто употребляемых R-операциях из системы R_α имеется радикал. При дифференцировании он оказывается в знаменателе, чем может существенно исказить характер решения задачи. Для того чтобы с одной стороны, приблизить область, описывающую сечение реального резонатора к реальному сечению, а с другой — учесть особенности структуры, возникающие в угловых точках, применяется метод модификации R-операций, использующихся при

построении структуры. Этот метод также носит название почти R-функций. При использовании обычной R-конъюнкции и R-дизъюнкции для описания области на ее границе наблюдается скачок. Он заменяется кубическим сплайном. Использувавшиеся ранее операции R-конъюнкции и R-дизъюнкций заменяются следующими более сложными:

$$x \vee y = f(x) \cdot f(y) - \frac{1}{2},$$

$$x \vee y = -\left(f(-x) \cdot f(-y) - \frac{1}{2}\right),$$

где

$$f(x) = \begin{cases} \frac{-16}{27}x^3 + x + \frac{1}{2}, & |x| < \frac{3}{4} \\ 1, & x \geq 3/4, \\ 0, & x < 3/4. \end{cases}$$

Для поиска функции U будем использовать метод Галеркина. В качестве базисных функций выберем полную систему f_i сдвигов и сжатий атомарной функции $f_{up_2}(r, z)$, которая с хорошей точностью позволяет приблизить искомую функцию [8]:

$$u = \omega \sum_{i=1}^{i=N} c_i f_i. \quad (8)$$

Подставив в (6), после ряда преобразований получим матричную задачу вида:

$$Ac + \lambda Bc = k^2 Fc, \quad (9)$$

где c — столбец неизвестных коэффициентов, а матрицы A, B, F — симметричны.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ

Ограничимся рассмотрением колебаний, не зависящих от индекса m , то есть $m = 0$.

На основе рассмотренной математической модели был реализован алгоритм расчета собственных колебаний и собственных частот трехззорного аксиально-симметричного резонатора с сечением, изображенным на рис. 2.

С помощью скругления углов удалось уменьшить величину поля E_r в углах (рис. 3), однако она все еще остается достаточно большой. Для того чтобы уменьшить или вовсе исключить эти особенности можно взять более сложную систему R-конъюнкций и R-дизъюнкций, у которых при дифференцировании не возникает особенностей в угловых точках.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 14-01-31397 мол_а.

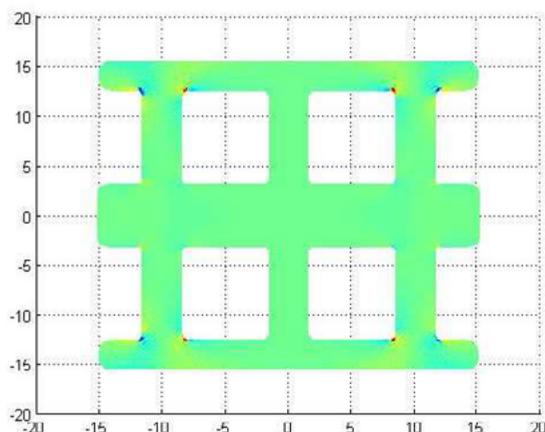


Рис. 3: Распределение компоненты E_r для пятой собственной моды.

- [1] Фисенко Р.Н. 13th Crimean Conference «Microwave&TelecommunicationTechnology», 2003.
- [2] Рвачев В.Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения. (Киев, изд. «Думка», 1982).
- [3] Кравченко В.Ф., Рвачев В.Л. Алгебра логики, атомарные функции и вейвлеты в физических приложениях. (М.: Физматлит, 2006).
- [4] Кравченко В.Ф., Басараб М.А. Булева алгебра и методы аппроксимации в краевых задачах электродинамики. (М.: Физматлит, 2004).
- [5] Боголюбов А.Н. и др. Журнал радиоэлектроники. № 11. (2014).
- [6] Боголюбов А.Н. и др. Радиотехника и электроника. **48**, № 7. С. 787. (2003).
- [7] Боголюбов А.Н. и др. Вестник Московского Университета, Серия 3. Физика. Астрономия. № 2, С. 21. (2009).
- [8] Кравченко В.Ф. Лекции по теории атомарных функций и некоторым их приложениям. (М.: Радиотехника, 2003).

Calculation of the eigenmodes of the three-gap resonator with smoothing corners

A. V. Shkitin^a, A. N. Bogolubov^b, A. I. Erohin^c

Department of mathematics, Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University
Moscow 119991, Russia

E-mail: ^aalshkit@yandex.ru, ^bbogan7@yandex.ru, ^cforlector@mail.ru

In the article the algorithm of eigenmodes calculation of three-gap axially symmetrical resonator of klystron is under consideration. The «nearly R-functions» approach is applied to describe the resonator structure. The finite-elements method with application of atomic functions as basic functions is used for calculations. It provides the high speed of convergence and significant efficiency of the algorithm.

PACS: 41.90.+e

Keywords: R-functions, atomic functions, klystron.

Received 27.07.2015.

Сведения об авторах

1. Боголюбов Александр Николаевич — докт. физ.-мат. наук, профессор; тел.: (495) 939-10-33, e-mail: bogan7@yandex.ru.
2. Ерохин Александр Игоревич — канд. физ.-мат. наук, научный сотрудник; тел.: (495) 939-10-33, e-mail: forlector@mail.ru.
3. Шкитин Александр Владимирович, аспирант, e-mail: alshkit@yandex.ru.