

Эволюция ветровых волн в кольцевом канале.

Н. П. Савенкова^{1,*}, С. А. Складчиков¹, В. С. Лапонин¹, С. В. Анпилов¹, У. Юсупалиев², С. А. Шутеев^{2†}¹Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, факультет вычислительной математики и кибернетики, лаборатория математического моделирования в физике Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д.1, стр. 52²Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, физический факультет, центр физических исследований Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д.1, стр.2

В настоящее время не достаточно подробно изучены как экспериментально, так и теоретически соотношения между длиной, амплитудой и скоростью таких волн. По этой причине данная работа посвящена изучению указанных соотношений с помощью математического моделирования.

PACS: 47.35.Lf УДК: 532.591

Ключевые слова: математическое моделирование, нелинейные волны.

Изучению ветровых волн посвящено большое количество работ, например [1–5]. Тем не менее, многие вопросы до сих пор остались не выясненными. Так, в настоящее время не достаточно подробно изучены как экспериментально, так и теоретически соотношения между длиной, амплитудой и скоростью таких волн. По этой причине данная работа посвящена изучению указанных соотношений с помощью математического моделирования.

Рассмотрим кольцевой канал с высотой 0.6 м, шириной 0.2 м и внутренним радиусом 1 м (рис. 1). В начальный момент времени в канале находится покоящаяся жидкость, занимающая половину объема в установке, оставшийся объем заполнен воздухом. Ветер (со скоростью 4.5 м/с) создается четырьмя вентиляторами, расположенными равномерно над каналом.

Для математического моделирования данного процесса запишем систему уравнений Навье–Стокса в декартовой системе координат, ось oZ которой совпадает осью симметрии кольца. Системы уравнений для воздуха и воды выписываются отдельно [5–8]. Для каждой среды с плотностью $\rho_{w,a}$ трехмерная система дифференциальных уравнений имеет вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial \rho u^2}{\partial x} + \frac{\partial \rho uv}{\partial y} + \frac{\partial \rho uw}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial x} = \\ \quad = (\text{Div } \tau)_1 + F_{\text{пов.нат.}}, \\ \frac{\partial \rho v}{\partial t} + \frac{\partial \rho uv}{\partial x} + \frac{\partial \rho v^2}{\partial y} + \frac{\partial \rho vw}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial y} = \\ \quad = (\text{Div } \tau)_2 + F_{\text{пов.нат.}}, \\ \frac{\partial \rho w}{\partial t} + \frac{\partial \rho vw}{\partial x} + \frac{\partial \rho w^2}{\partial y} + \frac{\partial \rho w^2}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial z} = \\ \quad = (\text{Div } \tau)_3 - \rho g + F_{\text{пов.нат.}}, \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} = 0, \end{array} \right.$$

где u , v , w — компоненты трехмерного вектора скорости в среде по координатам x , y , z

соответственно, $\overline{F}_{\text{пов.нат.}} = \gamma l$ — сила поверхностного натяжения, где l — ширина канала, $\gamma = \left(r - \frac{R_u T}{M} \left(1 - \frac{\rho_a}{\rho_w} \right) \right) \cdot \frac{M^{1/3} \rho_w^{2/3}}{6N^{1/3}}$ — коэффициент поверхностного натяжения, где x , y , z — декартовы координаты, t — время, U_a , V_a , W_a — компоненты скорости в воздухе по координатам x , y , z соответственно, U_w , V_w , W_w — компоненты скорости в воде по координатам x , y , z соответственно, g — ускорение свободного падения, μ — динамическая вязкость среды, r — теплота парообразования, ρ_w — плотность воды, ρ_a — плотность воздуха, R_u — универсальная газовая постоянная, T — температура, U — внутренняя энергия жидкости, M — молекулярная масса, N — число Авогадро,

$$(\text{Div } \tau)_i = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial \tau_{ki}}{\partial x_k}, \quad \tau_{ki} = 2\mu S_{ki},$$

$$S_{ki} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_k}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right).$$

На границе раздела сред воды и воздуха выписываются уравнения, учитывающие вязкое трение, посредством которого среды связаны между собой:

*E-mail: lap@cs.msu.ru

†E-mail: nesu@phys.msu.ru

$$\begin{aligned} \rho_w \frac{\partial U_w}{\partial t_1} &= -\mu_w \frac{\rho_w + \rho_a}{2} (U_w - U_a) \sqrt{(U_w - U_a)^2 + (V_w - V_a)^2 + (W_w - W_a)^2}, \\ \rho_w \frac{\partial V_w}{\partial t_1} &= -\mu_w \frac{\rho_w + \rho_a}{2} (V_w - V_a) \sqrt{(U_w - U_a)^2 + (V_w - V_a)^2 + (W_w - W_a)^2}, \\ \rho_w \frac{\partial W_w}{\partial t_1} &= -\mu_w \frac{\rho_w + \rho_a}{2} (W_w - W_a) \sqrt{(U_w - U_a)^2 + (V_w - V_a)^2 + (W_w - W_a)^2}, \\ \rho_a \frac{\partial U_a}{\partial t_1} &= \mu_a \frac{\rho_w + \rho_a}{2} (U_w - U_a) \sqrt{(U_w - U_a)^2 + (V_w - V_a)^2 + (W_w - W_a)^2}, \\ \rho_a \frac{\partial V_a}{\partial t_1} &= \mu_a \frac{\rho_w + \rho_a}{2} (V_w - V_a) \sqrt{(U_w - U_a)^2 + (V_w - V_a)^2 + (W_w - W_a)^2}, \\ \rho_a \frac{\partial W_a}{\partial t_1} &= \mu_a \frac{\rho_w + \rho_a}{2} (W_w - W_a) \sqrt{(U_w - U_a)^2 + (V_w - V_a)^2 + (W_w - W_a)^2}. \end{aligned}$$

На поверхности воды образуются волновые движения, которые начинаются с очень малых капиллярных волн (волн ряби). Со временем амплитуда (высота h в несколько мм) и длина волны λ увеличиваются, причем амплитуда нарастает быстрее, чем λ . Когда эти волны достигают длины $\sim 14 \div 17$ мм и крутизны $h/\lambda \sim 0.12 \div 0.15$ ситуация меняется: увеличение длины волны λ идет быстрее, чем рост их амплитуды h , в результате чего их крутизна h/λ уменьшается. В таком состоянии волны ряби превращаются в гравитационные, обладающие совершенно другими свойствами, чем капиллярные: в формировании волнового движения существенную роль играет сила тяжести.

Движение частиц воды в гравитационной волне складывается из интенсивного орбитального и небольшого поступательного движения в направлении распространения волны (наподобие спирали), в результате происходит перенос воды в направлении распространения волны. А при наличии ветрового воздействия на водную поверхность этот перенос усиливается, вследствие чего изменяется профиль волны: наветренный склон становится более пологим, а подветренный круче.

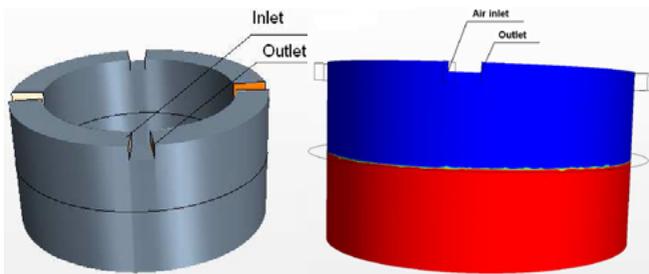


Рис. 1: Расчетная область, в которой проводилось математическое моделирование, снизу жидкость, а сверху воздух.

На наветренном склоне такой волны под действием ветра снова возникают короткие волны, через посредство которых происходит передача энергии ветра этой волне, т. е. она усиливается: увеличиваются её амплитуда, а также длина.

Дальнейшее воздействие ветра приводит к усилению этих волн, а следовательно, к увеличению их скоро-

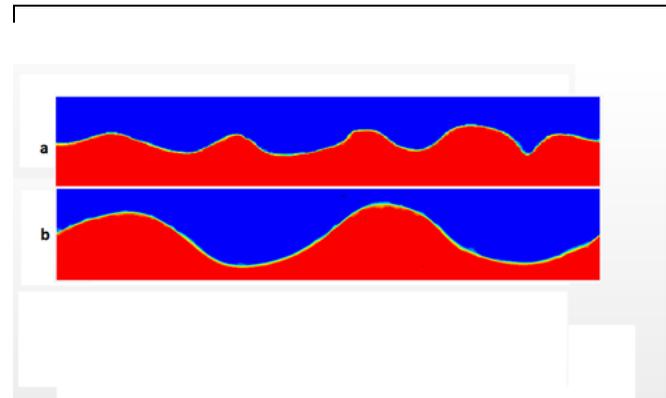


Рис. 2: Результат математического моделирования в кольцевом канале, развернутом в прямой отрезок. На рисунке 2а представлен момент времени, к которому образуются пять волн, а на рисунке 2б — момент времени, к которому образуются две волны.

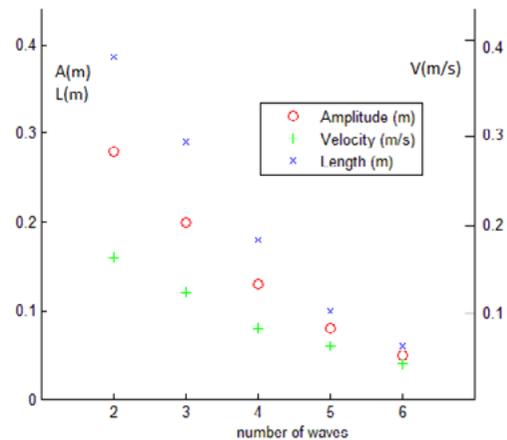


Рис. 3: Зависимость амплитуды, длины и скорости волны от количества образований на поверхности жидкости.

сти распространения V_W . Высота волн растет до тех пор пока отношение скорости волны V_W к скорости ветра V_{WD} не достигнет 0.5, и при большем значении происходит срыв острых гребней волн. После этого увеличивается их длина, что приводит к уменьше-

нию количества волн в канале и росту их амплитуд h (рис. 2). Соотношение между длиной λ , амплитудой h и скоростью V_W волн приведено на рис. 3. Из этих рисунков следует, что в результате эволюции ветровых волн в канале происходят одновременно уменьшение количества таких волн, рост их амплитуды и скорости распространения. То есть волны, взаимодействуя между собой и с ветром, становятся нелинейными: их

скорость зависит от их амплитуды (чем больше амплитуда, тем больше скорость волн).

В подветренной части волн образуются вихревые движения воздуха.

Таким образом, вышеприведенные качественные результаты моделирования адекватно описывают эволюцию ветровых волн, полученную из натуральных наблюдений [1–3, 9].

-
- [1] Юэн Г., Лэйк Б. Нелинейная динамика гравитационных волн на глубокой воде. (М.: Мир, 1987).
- [2] Степаняц Ю. А., Фабрикант А. Л. Современные проблемы физики. (М.: Физматлит, 1996).
- [3] Holthuijsen L. H. Waves in oceanic and coastal waters. (Cambridge University Press, 2007, ISBN 0521860288).
- [4] Falkovich, Gregory Fluid Mechanics. A short course for physicists. (Cambridge University Press, 2011, ISBN 978-1-107-00575-4).
- [5] Кузьмин Р., Лапонин В., Савенкова Н., Складчиков С. Инженерная физика. № 8. С. 19. (2014).
- [6] Savenkova N., Laponin V. A. Moscow University Computational Mathematics and Cybernetics. **37**, N2. P. 49. (2013).
- [7] Yusupaliyev U., Savenkova N., Shuteyev S. et al. Moscow University physics bulletin. **68**, N4. P. 317. (2013).
- [8] Bychkov V., Savenkova N., Anpilov S., Troshchiev Y. V. IEEE Transactions on Plasma Science. **40**, N12. P. 3158. (2012).
- [9] Шулейкин В. В. Физика моря. (М.: Наука, 1968).

Wind waves evolution in the annular channel

N. P. Savenkova^{1,a}, S. A. Skladchikov¹, V. S. Laponin¹, S. V. Anpilov¹, V. Yusupaliyev², S. A. Shuteyev^{2,b}

¹Department of mathematical modeling in physics, Faculty of Computational mathematics and cybernetics, Lomonosov Moscow State University, Moscow 119991, Russia

²Department of Physical Research, Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University Moscow 119991, Russia
E-mail: ^alap@cs.msu.ru, ^anesu@phys.msu.ru

Currently not enough investigated both experimentally and theoretically the ratio between the length, amplitude and velocity of such waves. For this reason, this work is devoted to the study of these relations by means of mathematical modeling.

PACS: 47.35.Lf.

Keywords: mathematical modeling, nonlinear waves.

Received 27.07.2015.

Сведения об авторах

1. Савенкова Надежда Петровна — докт. физ.-мат. наук, ведущий научный сотрудник, тел.: (495) 939-52-55, e-mail: savnp@yandex.ru.
2. Юсупалиев Усен — канд. физ.-мат. наук, старший научный сотрудник, тел.: (495) 939-52-55, e-mail: nesu@phys.msu.ru.
3. Складчиков Сергей Андреевич — канд. физ.-мат. наук, младший научный сотрудник, тел.: (495) 939-52-55, e-mail: sklادتchikov@mail.ru.
4. Лапонин Владислав Сергеевич — канд. физ.-мат. наук, младший научный сотрудник, тел.: (495) 939-52-55, e-mail: lap@cs.msu.ru.
5. Анпилов Сергей Валерьевич — канд. физ.-мат. наук, младший научный сотрудник, тел.: (495) 939-52-55, e-mail: svanpilov@inbox.ru.
6. Шутеев Сергей Александрович — канд. физ.-мат. наук, старший научный сотрудник, тел.: (495) 939-52-55, e-mail: nesu@phys.msu.ru.