

## Оценка предельного вакуумного тока в пролетном канале микроволнового устройства терагерцового диапазона

А. И. Ерохин\* В. М. Пикунов†

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет, кафедра математики  
Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2

Рассматривается математическая модель для исследования предельного вакуумного тока в пролетном канале микроволнового устройства терагерцового диапазона. Для расчетов используется метод конечных элементов, позволяющий учитывать произвольную геометрию поперечного сечения канала и форму поперечного сечения электронного потока.

PACS: 41.90.+e

УДК: 537.872.2

Ключевые слова: предельный ток, пролетный канал, терагерцовый диапазон.

Рассматривается пролетный канал микроволнового устройства, нагруженный круглым электронным пучком, фокусируемым бесконечно большим магнитным полем. Движение аксиально-симметричного электронного пучка считается одномерным. Такая система является хорошей моделью для оценки ряда параметров различных электронных микроволновых устройств, широко используемых в современной технике, например, клистронов с распределенным взаимодействием [1]. Представляет интерес оценка предельных вакуумных токов и поперечное распределение скалярного потенциала в случае терагерцового диапазона, когда радиус пролетного канала  $R$  меньше рабочей длины волны  $R < \lambda_0/4$ .

В качестве математической модели используется двумерная краевая задача в поперечном сечении пролетного канала для нелинейного уравнения Пуассона с граничными условиями Дирихле:

$$\Delta U = -\frac{I_{inj}}{\varepsilon_0 S_b c \sqrt{1 - 1/(1 + |e_0| U/m_0 c^2)^2}}, \quad (1)$$

$$U|_{\Gamma} = U_d. \quad (2)$$

Здесь  $U$  — распределение потенциала в сечении канала, ток инжекции  $I_{inj} = \text{const}$ ,  $\varepsilon_0$  — диэлектрическая постоянная,  $e_0$  и  $m_0$  — заряд и масса электрона соответственно,  $S_b$  — площадь поперечного сечения электронного пучка,  $c$  — скорость света,  $U_d$  — потенциал на границе канала. В данной работе рассматривается сплошной круглый пучок радиуса  $r_b$  с различными значениями коэффициента заполнения канала  $k$ . Распределение тока инжекции  $I_{inj}$  по сечению канала равномерное и для случая  $k = 0.5$  показано на рис. 1.

Задача (1), (2) описывает стационарное распределение потенциала в случае, когда ток инжекции меньше предельного вакуумного тока. Если ток инжекции больше предельного вакуумного тока, то необходимо



Рис. 1: Нормированное на единицу распределение тока инжекции по сечению пролетного канала.

рассматривать нестационарную постановку задачи, так как в этом случае стационарное решение не существует [2], и итерационный процесс, применяемый для его нахождения, расходится. Этот факт используется в алгоритме нахождения предельного вакуумного тока. В начале итераций задается небольшое значение тока инжекции, и для него итерационным процессом рассчитывается распределение потенциала  $U$ . В случае сходимости итерационного процесса ток инжекции увеличивается, и данный расчет проводится снова. Указанный процесс повторяется, пока не будет найдено значение тока, при котором итерационный процесс разойдется. Обычно при решении такой задачи в случае сходимости требуется не более 10 итераций.

На каждой итерации в качестве метода решения уравнения Пуассона с известной правой частью используется метод конечных элементов [3]. Отметим, что применение метода конечных элементов позволяет учитывать произвольную геометрию поперечного сечения канала и форму поперечного сечения электронного потока. Используя старое обозначение для потенциала, делается замена переменных, и уравнение (1) на  $i$ -й итерации переписывается в следующем виде:

$$-\Delta U^i = F^i, \quad (3)$$

$$F^i = -\frac{I_{inj}}{\varepsilon_0 S_b c \sqrt{1 - 1/(1 + |e_0| (U_d - U^{i-1})/m_0 c^2)^2}}. \quad (4)$$

\*E-mail: forlector@mail.ru

†E-mail: vmpikunov@mail.ru

В качестве нулевого приближения выбирается  $U^0 = 0$ . В методе конечных элементов используется слабая постановка краевой задачи. Для уравнения (3) с учетом однородного граничного условия она имеет вид: найти такие  $U^i \in \dot{H}^1$ , что  $\forall v \in \dot{H}^1$  выполнено

$$(\nabla U^i, \nabla v) = (F^i, v), \quad (5)$$

где  $(u, v)$  — скалярное произведение, определяемое как интеграл по сечению канала от произведения функций  $u$  и  $v$ ,  $\dot{H}^1$  — пространство Соболева.

При численном решении задачи (5) функция  $U_i$  ищется из пространства функций с конечным носителем. В качестве последних в данной работе выбираются базисные функции первого порядка, т. е. пирамиды Куранта [4]. Сходимость численного решения к точному решению по норме  $\dot{H}^1$  при данном выборе базиса есть  $O(h)$  [4].

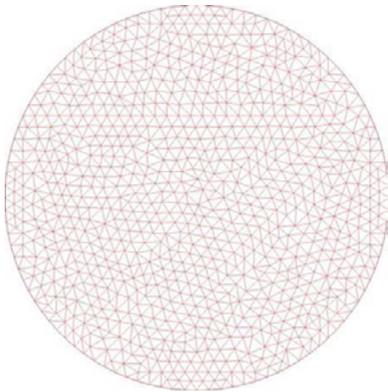


Рис. 2: Пример разбиения сечения пролетного канала на треугольные конечные элементы.

Для вычислений используется свободно распространяемая программа `freefem++` [5]. На границе области берется 300 точек, далее с помощью которых внутренняя область разбивается на треугольники (рис. 2). С помощью встроенного в программу для триангуляции области алгоритма Делане–Вороного [6] сечение канала разбивается на 15640 конечных элементов. При дальнейшем разбиении области точность расчетов практически не возрастает. Количество итераций при решении нелинейного уравнения Пуассона не превышает 6. Расчеты проводятся на компьютере с двухъядерным процессором с частотой 3.06 ГГц и оперативной памятью 4 Гб. Расчетное время не превышает 28 с.

На основе математической модели проводится расчет предельного вакуумного тока для различных значений радиуса электронного пучка и потенциала на границе, исследуется распределение потенциала в сечении канала при различных значениях тока инжекции  $I_{inj}$ . Проводится сравнение полученного предельного тока с результатами, полученными по аналитической формуле из работы [2]:

$$I_{lim} = 17 \frac{(\gamma^{2/3} - 1)^{3/2}}{1 + 2 \ln(R/r_b)}, \quad (6)$$

где:

$$\gamma \approx 1 + \frac{U_d [kV]}{511}. \quad (7)$$

Радиус пролетного канала  $R = 0.25$  мм. На рис. 3 приводится зависимость, полученная численно и аналитически предельного вакуумного тока, от коэффициента заполнения канала электронным пучком  $k$  при  $U_d = 16.5$  кВ. Для случая, когда  $k = 0.5$  (при этом радиус электронного пучка  $r_b = 0.125$  мм) и потенциал на границе  $U_d = 16.5$  кВ, полученный с помощью МКЭ вакуумный предельный ток составляет  $I_{lim} = 26.6$  А.

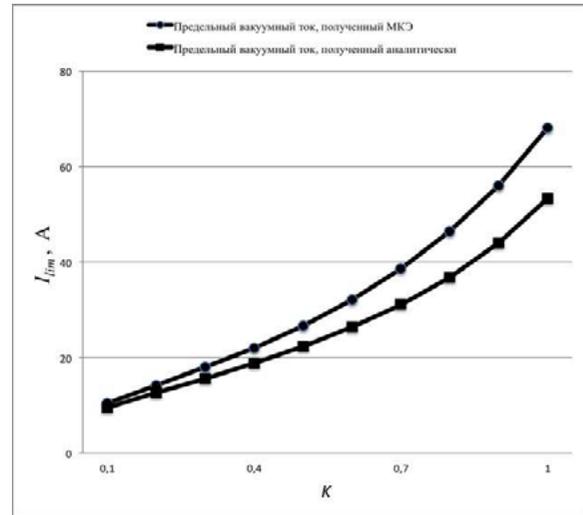


Рис. 3: Зависимость предельного вакуумного тока  $I_{lim}$  от коэффициента заполнения электронным пучком пролетного канала  $k$ .

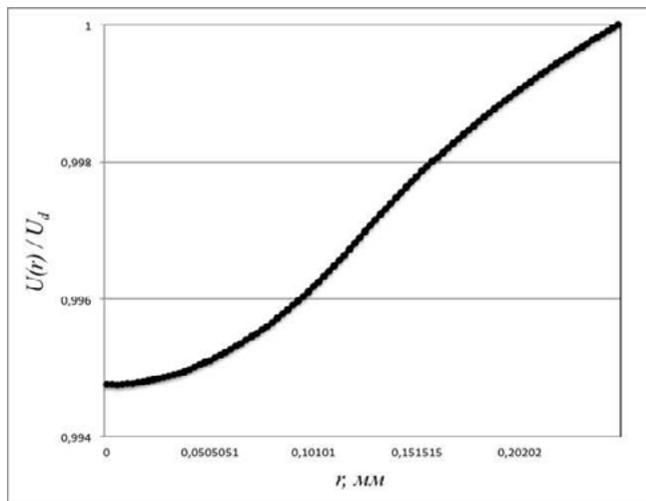
Распределение потенциала  $U(r)$  при токе инжекции  $I_{inj} = 0.3$  А в случае, когда потенциал на границе  $U_d = 16.5$  кВ и коэффициент заполнения пролетного канала электронным пучком  $k = 0.5$ , показан на рис. 4. Результаты численного и аналитического расчета предельного вакуумного тока при различных значениях потенциала на границе при  $k = 0.5$  приведены в табл. 1.

Из приведенных данных для предельных вакуумных токов следует, что основным ограничением на величину тока в пролетном канале является метод формирования электронного пучка. Для ввода электронного потока в пролетный канал малого поперечного сечения необходимо использовать электронные пушки с достаточно большим коэффициентом компрессии  $C_j = (S_k/S_b)$ , где:  $S_k$  — площадь катода.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 14-01-31397 мол\_а.

Таблица I: Предельный вакуумный ток при различных значениях  $U_d$ 

$U_d$ [кВ]	$I_{np}$ [А],	
	аналитическая теория	расчет МКЭ
2	0.94	1.1
4	2.7	3.2
6	4.9	5.8
8	7.6	9.0
10	10.6	12.6
12	13.9	16.5
14	17.5	20.8
16	21.3	25.4
18	25.4	30.3
20	29.7	35.5
22	34.3	39.9
24	39.0	46.6

Рис. 4: Зависимость нормированного потенциала  $U(r)/U_d$  от радиуса  $r$  при  $I_{inj} = 0.3$ .

- [1] Steeretal B. <http://www.cpii.com/docs/related/40/EIK%20Technology%20at%20MMW%20&%20SubMMW%20Wavelengths.pdf>
- [2] Богданкевич Л. С., Рухадзе А. А. УФН. **103**, № 3. С. 609. (1971).
- [3] Стренг В., Фикс Дж. Теория метода конечных элемен-

тов. М.: Мир. (1977).

- [4] Марчук Г. И., Агошков В. И. Введение в проекционно-сеточные методы. М.: Наука. (1981).
- [5] <http://www.freefem.org/ff++>
- [6] George P. L. Automatic triangulation. Wiley. (1996).

## Vacuum Limiting Current Estimation in Drift Channel of Terahertz Region Microwave Device

A. I. Erokhin<sup>a</sup>, V. M. Pikunov<sup>b</sup>

Department of mathematics, Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University  
Moscow 119991, Russia

E-mail: <sup>a</sup>forlector@mail.ru, <sup>b</sup>vpikunov@mail.ru

Mathematical model for investigation of vacuum limiting current in a drift channel of terahertz region microwave device is considered. Finite element method which allows to consider arbitrary cross-section geometry of the channel and electron streamis used for calculations.

PACS: 41.90.+e

Keywords: limiting current, drift channel, terahertz region.

Received 27.07.2015.

### Сведения об авторах

1. Ерохин Александр Игоревич — канд. физ.-мат. наук, научный сотрудник; тел.: (495) 939-10-33, e-mail: forlector@mail.ru.
2. Пикунов Виктор Михайлович — канд. физ.-мат. наук, старший преподаватель; тел.: (495) 939-10-33, e-mail: vmpikunov@mail.ru.