

## Сопоставление методов оценки времени запаздывания систем с задержкой по зашумленным периодическим реализациям

Ю. М. Ишбулатов<sup>1,\*</sup>, А. С. Караваев<sup>1,2,†</sup>, В. И. Пономаренко<sup>1,2,‡</sup>, М. Д. Прохоров<sup>2,§</sup>, Б. П. Безручко<sup>1,2,¶</sup>

<sup>1</sup>Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского,  
факультет нано- и биомедицинских технологий,  
базовая кафедра динамического моделирования и биомедицинской инженерии  
Россия, 410012, Саратов, ул. Астраханская, д. 83, стр. 8

<sup>2</sup>Саратовский филиал Института радиотехники и электроники имени В. А. Котельникова РАН  
Россия, 410019, Саратов, ул. Зеленая, д. 38

В работе сопоставляются возможности и границы применимости предложенного нами оригинального подхода и пяти известных ранее методов реконструкции при анализе периодических реализаций в присутствии динамических и измерительных шумов.

PACS: 02.60.Cb

УДК: 534.015

Ключевые слова: системы с запаздыванием, динамическая реконструкция, нелинейные колебания.

Системы с запаздывающей обратной связью широко распространены среди объектов живой и неживой природы. Исследованию таких систем способствует наличие формализованных представлений об их структуре и динамике в виде дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом. Особую роль системы с запаздыванием играют при моделировании биологических систем. Это связано с низкими скоростями распространения сигналов в организме, что требует явного учета времени запаздывания в моделях [1–4]. Модели в виде дифференциальных уравнений с задержкой широко используются также для описания радиофизических и оптических систем [5–9]. Наличие математической модели открывает возможности для прогнозирования поведения объекта в различных условиях и при изменении управляющих параметров, а также оценивания параметров системы, недоступных непосредственным измерениям, по сигналу системы.

Универсального метода реконструкции, позволяющего производить динамическую реконструкцию систем по их реализациям не существует [10]. Поэтому исследователи вынуждены предлагать методы, ориентированные на узкие классы систем, учитывая особенности структуры конкретных объектов. Задача реконструкции параметров периодических систем с задержкой дополнительно осложнена простотой их колебательных режимов, несущих малое количество информации об исследуемой системе. В таких ситуациях методы реконструкции, хорошо зарекомендовавшие себя при анализе хаотических систем, оказываются неприемлемыми или имеют узкие границы применимости.

В силу того что поведение близкое к периодическому особенно характерно для систем биологического про-

исхождения, задача реконструкции периодических систем важна как для получения фундаментальных знаний о живых объектах, так и для решения прикладных задач медицинской диагностики [11–13]. Поэтому настоящая работа посвящена изучению границ применимости известных ранее и предложенного нами оригинального метода реконструкции систем с запаздыванием по зашумленным периодическим временным рядам на примере системы барорефлекторной регуляции среднего артериального давления [2]. Модельное уравнение имеет вид дифференциального уравнения первого порядка с запаздыванием:

$$\varepsilon \dot{x}(t) = -x(t) + f(x(t - \tau)), \quad (1)$$

где  $\tau$  — время запаздывания,  $\varepsilon$  — инерционность, а нелинейная функция  $f$  имеет следующий вид:

$$f(x) = k \left( \frac{r^*}{1 + \alpha e^{-\beta x}} - \frac{r^*}{1 + \alpha e^{\beta x}} \right). \quad (2)$$

При  $\varepsilon = 2$ ,  $\tau = 3.6$ ,  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 2$ ,  $r^* = 1$ ,  $k = -1.65$  исследуемая система демонстрирует периодические колебания с периодом около 10 с.

В нашем исследовании мы рассматривали границы применимости пяти методов оценки времени запаздывания, широко применяемых для анализа хаотических систем, и подхода, основанного на использовании дополнительной системы с синхронным откликом [14]. В рамках исследования сопоставлялись следующие известные методы: оценка автокорреляционной функции (АКФ), построение статистики распределения экстремумов [10], подсчет информационной энтропии [15], расчет филл-фактора траектории системы в трехмерном пространстве [16], определение длины проекции траектории системы в двумерное пространство [17].

Важнейшим этапом реконструкции систем с запаздыванием является восстановление времени задержки. Этот шаг, как правило, выполняется на первом этапе реконструкции. При этом небольшие ошибки при оценке  $\tau$  приводят к резкому росту погрешности при последующей оценке остальных параметров системы [14].

\*E-mail: ishbulatov95@mail.ru

†E-mail: karavaevas@gmail.com

‡E-mail: ponomarenkovi@gmail.com

§E-mail: mdprokhorov@yandex.ru

¶E-mail: bezruchkobp@gmail.com

Если  $\tau$  восстановлено точно, то прочие параметры могут быть реконструированы, например, с помощью метода предложенного в [17]. Поэтому, в данной работе мы использовали точность оценки времени запаздывания в качестве критерия работоспособности сопоставляемых подходов, считая допустимой ошибку в одну единицу шага выборки.

Предложенный нами метод восстановления времени задержки основан на использовании дополнительной системы с синхронным откликом. Временной ряд  $x(t)$  исследуемой системы подается на вход вспомогательной системы, имеющей структуру аналогичную исследуемой, но с разорванной петлей обратной связи. Затем мы вычисляем разность сигналов  $z(t) = x(t) - \nu(t)$ , где  $\nu(t)$  — сигнал вспомогательной системы. Если параметры вспомогательной системы идентичны параметрам исследуемой, то дисперсия  $D$  разностного сигнала  $z(t)$  будет определяться только шумами. Таким образом, параметры оценивались путем минимизации целевой функции  $D(\tau, \varepsilon, f)$  — дисперсии сигнала  $z(t)$ .

В ходе численного моделирования мы подвергли систему воздействию измерительных и динамических шумов, всегда присутствующих в реальной системе. Интенсивность добавленного шума рассчитывалась как отношение среднеквадратичного отклонения шума к стандартному отклонению системы без шума, выраженное в процентах.

Также в ходе численных экспериментов мы оценивали зависимость точности реконструкции параметров от уровня динамических шумов. Важно отметить, что широкополосное шумовое воздействие на динамику системы в некоторых случаях может облегчить реконструкцию параметров. Внешний широкополосный сигнал, например импульсы, интервалы между которыми меняются по случайному закону, будет сталкивать траекторию с аттрактора, и система будет постоянно находиться в режиме переходных процессов. Однако использование такого подхода не всегда приводит к положительным результатам. Случайная последовательность импульсов вводилась в динамику исследуемой системы в соответствии с представлениями, предложенными в работе [3] следующим образом:

$$\varepsilon \dot{x}(t) = -x(t) + f(x(t - \tau)) + y(t), \quad (3)$$

где  $y(t)$  — динамический шум, представляющий собой последовательность симметричных биполярных прямоугольных импульсов длительность которых равна 1, а расстояние между передними фронтами импульсов меняется случайным образом в интервале от 3 до 5. Такие параметры воздействующего сигнала были выбраны в связи с тем, что они могут быть качественно воспроизведены в натурном эксперименте в физиологических тестах с механической или электрической стимуляцией групп каротидных барорецепторов с частотой от 3 до 5 секунд. В ходе проведенных исследований использовались и другие временные параметры такого воздействующего импульсного сигнала, однако

преимущества по сравнению с указанными параметрами не было выявлено.

В качестве внешнего воздействия нами также использовались цветные шумы с различными распределениями и случайные последовательности импульсов различной формы. Однако использование именно случайной последовательности биполярных прямоугольных импульсов с невысокой скважностью оказалось наиболее эффективным для восстановления времени запаздывания системы (3).

В ходе проведенных исследований нами были получены следующие результаты.

Методы, основанные на оценке АКФ, расчете информационной энтропии и построении статистики распределения экстремумов не позволяют оценить время запаздывания исследуемой периодической системы даже в отсутствие измерительных шумов. Изменение уровня динамических шумов не оказывает влияние на работоспособность методик, основанных на оценках АКФ и информационной энтропии. Метод построения статистики распределения экстремумов начинает демонстрировать локальный минимум на верном времени запаздывания при уровне динамических шумов более 75%, однако, при дальнейшем увеличении уровня внешнего воздействия минимум не становится абсолютным, даже при длинах реализаций более 360 характерных периодов (что соответствует часовой записи в натурном эксперименте и, фактически, является пределом возможностей для исследований *in vivo*).

Метод, основанный на определении длины проекции траектории системы в двумерное пространство, по временному ряду автономной системы точно восстанавливал значения времени запаздывания  $\tau = 3.6$  и инерционности  $\varepsilon = 2$ . Для успешной реконструкции параметров оказалось достаточно реализации длиной 10 характерных периодов. Однако, метод продемонстрировал высокую чувствительность к измерительным шумам. Даже увеличение длины реализации, вплоть до 360 характерных периодов, не позволяет провести удачную реконструкцию в присутствии измерительного шума со среднеквадратичным отклонением в 1%. Добавление динамических шумов также отрицательно сказывалось на работоспособности метода.

Мы исследовали также работоспособность метода, основанного на расчете филл-фактора траектории системы в трехмерном пространстве с помощью подсчета количества занятых кубических элементов этого пространства. Результаты численного моделирования показали, что метод груб к выбранному размеру грани куба  $\delta$  при  $\delta < 0.007$ . Поэтому, при расчетах мы использовали  $\delta = 0.0035$ .

Установлено, что в отсутствие широкополосного возбуждающего воздействия методика не позволяет восстановить время запаздывания. В отсутствие измерительных шумов время запаздывания точно восстанавливается в присутствии воздействия  $y(t)$  со среднеквадратичным отклонением в 5% от среднеквадратичного отклонения автономной системы по временной ре-

ализации длиной 15 характерных периодов. В присутствии измерительного шума со среднеквадратичным отклонением в 1% от среднеквадратичного отклонения автономной системы точная реконструкция времени запаздывания оказалась возможной при увеличении длины реализации до 360 характерных периодов и среднеквадратичного отклонения воздействия  $y(t)$  до 75%

Метод, основанный на использовании вспомогательной системы с синхронным откликом, показал лучшую устойчивость к измерительным шумам. При длине реализации в 360 характерных периодов метод оказался работоспособным при уровнях измерительных шумов от 0 до 7%. При этом наличие динамического шума с уровнем меньше 20% не оказывает значимого эффекта на точность реконструкции  $\tau$ . Отсутствие явного учета широкополосного возбуждения в структуре вспомогательной системы приводит к потере методом работоспособности при более высоких уровнях динамического шума.

В работе выявлялись возможности и исследовались границы применимости предложенного нами подхода и нескольких известных методов реконструкции времени задержки генераторов с запаздывающей обратной связью вида (1) по их временным рядам, соответствующим движению системы вблизи предельного цикла. Исследования проводились на примере временных реализаций модельной системы барорефлекторной регуляции среднего артериального давления [2]. Исследовалась работоспособность методов при наличии возбуждающего систему воздействия в виде случайной после-

довательности биполярных прямоугольных импульсов со скважностью порядка нескольких единиц и в присутствии измерительного шума.

Необходимость максимального учета априорной информации о системе для решения задачи реконструкции подтверждается результатами проведенного нами численного моделирования. Было установлено, что методы, основанные на оценке автокорреляционной функции, информационной энтропии, статистике распределения экстремумов и не учитывающие особенности структуры конкретной системы оказались неприменимы для оценки параметров модели с периодической реализацией даже в отсутствие измерительных шумов.

Результаты численного моделирования свидетельствуют о том, что предложенный нами метод, использующий вспомогательную систему с синхронным откликом, демонстрирует лучшую устойчивость к измерительным шумам. Метод, основанный на расчете филл-фактора траектории системы в трехмерном пространстве, оказался работоспособным в наиболее широком диапазоне динамических шумов, но сильно уступает нашему подходу в устойчивости к измерительным шумам. Методика определения длины проекции траектории системы в двумерное пространство оказалась наименее требовательной к длине реализации при анализе автономной системы, но также проявила высокую уязвимость к шумам различной природы.

Работа была выполнена при поддержке гранта РФФ № 14-12-00291.

- 
- [1] *Seidel H., Herzel H.* Physica D. **115**. P. 145. (1998).  
 [2] *Ringwood J.V., Malpas S.C.* American Physiol. **280**. P. 1105. (2001).  
 [3] *Burgess D.E.* American Physiol. **273**. P. 1878. (1997).  
 [4] *Mackey M.C., Glass L.* Science. **197**. P. 287. (1977).  
 [5] *Ikeda K.* Opt. Commun. **30**. P. 257. (1979).  
 [6] *Hasler M.* Proc. of IEEE. **75**, N 8. P. 40. (1987).  
 [7] *Hegger R., Kantz H., Schmuser F., Diestelhorst M., Kapsch R.-P., Beige H.* Chaos. **8**, N 3. P. 727. (1998).  
 [8] *Безручко Б.П., Селезнев Е.П.* Письма в ЖТФ. **20**, В. 19. С. 75. (1994).  
 [9] *Lang R., Kobayashi K.* IEEE J. Quantum Electron. **16**. P. 347. (1980).  
 [10] *Bezruchko B.P., Karavaev A.S., Ponomarenko V.I., Prokhorov M.D.* Physical Review E. **64**. P. 056216. (2001).  
 [11] *Prokhorov M.D., Ponomarenko V.I., Gridnev V.I., Bodrov M.B., Bespyatov A.B.* Phys. Rev. E. **68**. P. 041913. (2003).  
 [12] *Karavaev A.S., Prokhorov M.D., Ponomarenko V.I., Kiselev A.R., Gridnev V.I., Ruban E.I., Bezruchko B.P.* Chaos. **19**. P. 033112. (2009).  
 [13] *Kiselev A.R., Gridnev V.I., Prokhorov M.D., Karavaev A.S., Posnenkova O.M., Ponomarenko V.I., Bezruchko B.P., Shvartz V.A.* Annals of Noninvasive Electrocardiology. **17**. P. 204. (2012).  
 [14] *Prokhorov M.D., Ponomarenko V.I., Karavaev A.S., Bezruchko B.P.* Physica D. **203**, N 3. P. 209. (2005).  
 [15] *Tian Y.-C., Gao F.* Physica D. **108**. P. 113. (1997).  
 [16] *Hegger R., Boenner M.J., Kantz H., Giaquinta A.* Phys. Rev. E. **56**. P. 5083. (1997).  
 [17] *Boenner M.J., Popp M., Meyer Th., Kittel A., Parisi J.* Phys. Rev. E. **54**. P. 3082. (1996).

## Comparison of methods of delay time reconstruction for time-delay systems from noisy periodic data

Y. M. Ishbulatov<sup>1,a</sup>, A. S. Karavaev<sup>1,2,b</sup>, V. I. Ponomarenko<sup>1,2,c</sup>, M. D. Prokhorov<sup>2,d</sup>, B. P. Bezruchko<sup>1,2,e</sup>

<sup>1</sup>*Department of Nano- and Biomedical Technologies, Saratov State University  
Astrakhanskaya Street, 83, Saratov, 410012, Russia*

<sup>2</sup>*Saratov Branch of V.A. Kotel'nikov Institute of Radio Engineering and Electronics of RAS  
Zelyonaya Street, 38, Saratov, 410019, Russia*

*E-mail: <sup>a</sup>ishbulatov95@mail.ru, <sup>b</sup>karavaevas@gmail.com, <sup>c</sup>ponomarenkovi@gmail.com, <sup>d</sup>mdprokhorov@yandex.ru, <sup>e</sup>bezruchkobp@gmail.com*

In the present study a comparison of the original approach and five known methods is carried out via analysis of periodic data in the presence of measurement and dynamical noise.

PACS: 02.60.Cb

Keywords: delayed systems, dynamical reconstruction, nonlinear oscillations.

Received 27.07.2015.

### Сведения об авторах

1. Ишбулатов Юрий Михайлович — студент, старший лаборант; тел.: (8452) 51-11-80, e-mail: ishbulatov95@mail.ru.
2. Караваев Анатолий Сергеевич — канд. физ.-мат. наук, старший научный сотрудник; тел.: (8452) 51-11-80, e-mail: karavaevas@gmail.com.
3. Пономаренко Владимир Иванович — доктор. физ.-мат. наук, ведущий научный сотрудник, доцент; тел.: (8452) 51-11-80, e-mail: ponomarenkovi@gmail.com.
4. Прохоров Михаил Дмитриевич — доктор. физ.-мат. наук, заведующий лабораторией, доцент; тел.: (8452) 51-11-80, e-mail: mdprokhorov@yandex.ru.
5. Безручко Борис Петрович — доктор. физ.-мат. наук, ведущий научный сотрудник, профессор; тел.: (8452) 51-11-80, e-mail: bezruchkobp@gmail.com.