

Изменение оценок связанности методом причинности по Грейнджеру в зависимости от уровня шума в канале связи

Т. М. Медведева,* И. В. Сысоев†

Саратовский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского,
факультет нано- и биомедицинских технологий,
кафедра динамического моделирования и биомедицинской инженерии
Россия, 410012, Саратов, ул. Астраханская, 83

В статье рассматривается эффект локального увеличения чувствительности метода нелинейной причинности по Грейнджеру с ростом шума. Метод применяется для связанных эталонных нелинейных систем, как с дискретным, так и с непрерывным временем.

PACS: 87.10.Mn

УДК: 530.182, 51-73

Ключевые слова: анализ сигналов, временные ряды, причинность по Грейнджеру.

Использование хаотических систем для передачи информации получило большое распространение в последнее время. Как следствие, актуальным является вопрос об определении наличия/отсутствия взаимодействия между ними по их экспериментальным сигналам — временным рядам. В настоящее время получили распространение подходы к определению взаимодействий путём детектирования причинно-следственных связей между настоящим состоянием одного объекта и прошлыми состояниями другого (или нескольких других). К таким подходам можно отнести причинность по Грейнджеру [1], энтропию переноса [2] и частную направленную когерентность [3].

Это связано тем, что такие подходы, в частности, метод причинности по Грейнджеру, способны выявить направленную произвольную функциональную связанность между объектами исследования, в то время как традиционные меры: взаимная корреляционная функция, функция когерентности, коэффициент фазовой синхронизации, функция взаимной информации выявляют только линейную связь и не могут определить её направление. Из всех подходов, основанных на выявлении причинно-следственных связей метод причинности по Грейнджеру требует наименьших объёмов данных, т.е. можно рассчитывать на анализ нестационарных сигналов или анализ в скользящем окне [4].

Одна из проблем метода причинности по Грейнджеру состоит в том, что зависимость его работоспособности от шумов мало исследована, хотя шумы всегда присутствуют в канале связи и полностью очистить сигнал от шума, как правило, невозможно. Некоторые результаты в данной области получены в [5,6] для линейных систем или в случае когда оператор эволюции объектов исследования хорошо известен.

Целью данной работы является исследование поведения зависимости характеристик метода причинности по Грейнджеру от дисперсии внешнего шума σ^2 на эталонных нелинейных системах.

Идея метода заключается в том, что если система Y воздействует на систему X , то значения временного ряда $\{y\}_{n=1}^N$ системы Y , являются причиной изменений временного ряда $\{x\}_{n=1}^N$ системы X . Следовательно, учёт данных от системы Y должен помочь в предсказании будущих значений временного ряда $\{x\}_{n=1}^N$. Расчёт производится следующим образом.

На первом этапе строится собственная модель (1), предсказывающая следующее значение во временном ряде $\{x\}_{n=1}^N$ по D_s предыдущим:

$$x_n = f(x_{n-l}, x_{n-2l}, \dots, x_{n-D_s l}, c^s) + \xi_n^s \quad (1)$$

где f — аппроксимирующая функция, l — лаг модели, D_s — собственная размерность модели, c^s — неизвестные коэффициенты, а ξ — остатки. Коэффициенты c^s оцениваются методом наименьших квадратов по экспериментальной реализации $\{x_n\}_{n=1}^N$. Полученная модель имеет среднеквадратичную ошибку аппроксимации ε_s^2 , равную дисперсии остатков ξ_n^s .

Следующим шагом строится совместная модель (2), использующая для предсказания значения в ряде $\{x_n\}_{n=1}^N$ также D_a значений из ряда $\{y\}_{n=1}^N$:

$$x_n = g(x_{n-l}, x_{n-2l}, \dots, x_{n-D_s l}, y_{n-l}, y_{n-2l}, \dots, y_{n-D_a l}, c^j) + \xi_n^j, \quad (2)$$

где D_a — размерность добавки, c^j — коэффициенты совместной модели; f и g — полиномы общего вида степени P . После того, как совместная модель (2) построена, можно рассчитать её среднеквадратичную ошибку прогноза ε_j^2 .

Случай $\varepsilon_j^2 < \varepsilon_s^2$ показывает, что данные из ряда системы Y помогли предсказать поведение системы. В таком случае можно сказать, что Y действует на по Грейнджеру. В качестве количественной меры воздействия используется PI — улучшение прогноза, определяемое по формуле (3):

$$PI = 1 - \frac{\varepsilon_j^2}{\varepsilon_s^2} \quad (3)$$

*E-mail: golovatanya@rambler.ru

†E-mail: ivssci@gmail.com

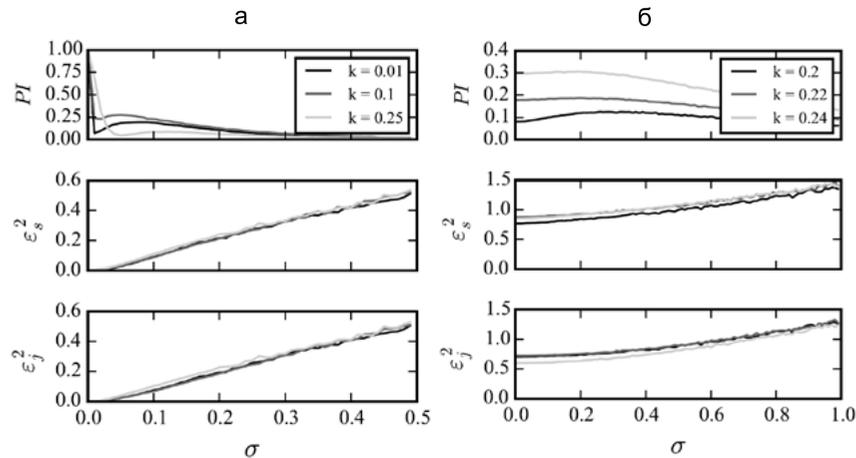


Рис. 1: Зависимости улучшения прогноза PI , уровня собственной ε_s^2 и совместной ε_j^2 ошибок аппроксимации от уровня измерительного шума σ для связанных логистических отображений (а) и для связанных автогенераторов с 1.5 степенями свободы (б), k — коэффициент связи между системами.

Улучшение прогноза $PI = 0$ в случае, если данные из ряда Y не помогают предсказывать динамику системы X , т. е. $\varepsilon_j^2 = \varepsilon_s^2$. PI достигает 1, если динамика полностью описывается совместной моделью ($\varepsilon_j = 0$), но не описывается индивидуальной.

В работе зависимость улучшения прогноза от уровня шума исследовалась на численных примерах — дискретных отображениях последования, связанных однонаправлено (логистическое отображение, воздействующее на логистическое отображение; отображение окружности, воздействующее на отображение окружности; отображение Эно, воздействующее на отображение Эно; отображение Эно, воздействующее на отображение окружности). Аттрактор ведущей системы представлял собою во всех рассмотренных случаях многоленточный хаотический аттрактор, образовавшийся вскоре после критической бифуркации Фейгенбаума; аттрактор ведомой системы — периодический с периодом 1, 2, 4 и др., так и хаотический аттрактор, тоже многоленточный.

Для всех перечисленных систем зависимость $PI(\sigma)$ немонотонна — рис. 1а, что объясняется следующим образом. При нулевом уровне шума и конечной величине связи совместная ошибка близка к нулю с точностью вычислений, а собственная — конечна и отлична от нуля.

При малых уровнях шума его увеличение приводит к ухудшению точности прогноза и увеличению совместной и индивидуальной ошибок пропорционально σ , как следствие этого величина $\varepsilon_j^2/\varepsilon_s^2$ растёт и PI уменьшается. Начиная с некоторого значения σ уровень шума становится настолько велик, что предсказать точно значение x_n оказывается невозможно, но

всё ещё можно предсказать, в какую часть аттрактора (ленту, группу точек) попадёт точка на следующем шаге и полезной оказывается информация о переключениях между лентами. Поэтому учёт информации о системе Y становится снова полезен для прогноза состояния системы X вследствие синхронности переключений. Чем больше шум, тем меньше оказывается роль собственной динамики и больше роль переключений в предсказании следующего состояния, $PI(\sigma)$ растёт. Наконец, при очень больших уровнях шума кластеры точек на аттракторе начинают сливаться воедино, информация о переключениях теряет смысл, и $PI(\sigma)$ снова начинает убывать к нулю.

Кроме того, в работе были рассмотрены связанные потоковые системы: система Рёслера [7] и автогенератор с 1.5 степенями свободы [8], для которых тоже был показан немонотонный характер зависимости $PI(\sigma)$ — рис. 1б.

Таким образом, синхронность переключения между лентами аттрактора дает дополнительную информацию о состоянии системы и приводит к локальному увеличению уровня улучшения прогноза, что может повлиять на результаты анализа связанности, особенно в случае, когда анализируется нестационарный сигнал, дисперсия и форма которого меняется со временем, а также в случае изменений свойств канала связи во времени.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты №№ 14-02-00492 и 14-07-00273) и стипендии Президента Российской Федерации для поддержки молодых учёных № СП-1510.2015.4.

[1] Granger C. W. J. *Econometrica*. **37**, No. 3. P. 424. (1969).

[2] Schreiber T. *Phys. Rev. Lett.* **85**. P. 461. (2000).

- [3] Schelter B., Timmer J., Eichler M. J. Neuroscience Methods. **179**. P. 121. (2009). [7] Roesler O.E. Phys. Lett. **A57**, No 5. P. 397. (1976).
[4] Hesseet W. et al. J. Neuroscience Methods. **124**. P. 27. (2003). [8] Дмитриев А.С., Кислов В.Я. Радиотехника и электроника. **29**, № 12. С. 2389. (1984).
[5] Chen Y. et al. Physics Letters A. **324**. P. 26. (2004).
[6] Marinazzo D., Pellicaro M., Stramaglia S. Phys. Rev. E.

Change in estimates of coupling by Granger causality with the level of noise in a communication channel

T. M. Medvedeva^a, I. V. Sysoev^b

Department of Dynamic Modeling and Biomedical Engineering, Faculty of Nano- and Biomedical technologies, Chernyshevsky Saratov State University, Saratov 410012, Russia
E-mail: ^agolovatanya@rambler.ru, ^bivssci@gmail.com

The article deals with the effect of local increasing the sensitivity of nonlinear Granger causality with the growth of a noise. The method is applied to coupled nonlinear model systems with both discrete and continuous time.

PACS: 87.10.Mn

Keywords: signal analysis, time series, Granger causality.

Received 27.07.2015.

Сведения об авторах

1. Медведева Татьяна Михайловна — магистрант; тел.: 8 (937) 244-0443, e-mail: golovatanya@rambler.ru.
2. Сысоев Илья Вячеславович — канд. физ.-мат. наук, доцент; тел.: 8 (452) 52-46-89, e-mail: ivssci@gmail.com.