

Нелинейное акустическое взаимодействие в трехфазной среде

Я. М. Жилейкин,* А. Б. Кукаркин,* Н. И. Пушкина†

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,

Научно-исследовательский вычислительный центр, 119991, Москва, Воробьевы горы, д. 1, стр. 4

(Статья поступила 27.10.2014; Подписана в печать 28.11.2014)

Нелинейное возбуждение акустической волны двумя звуковыми волнами накачки исследуется в трехфазном морском осадке, который состоит из твердого каркаса и жидкой фазы, содержащей воздушные полости (баббланы). Чтобы избежать образования гармоник, взаимодействие рассматривается в интервале частот, в котором наблюдается значительная дисперсия скорости звука. Получены нелинейные уравнения, описывающие взаимодействие акустических волн в морских осадках, содержащих в жидкой фазе воздушные полости. Получено выражение для амплитуды возбужденной волны и проведено численное исследование ее зависимости от расстояния и от резонансных частот баббланов.

PACS: 43.25.+y

УДК: 534.222

Ключевые слова: нелинейные взаимодействия, морские осадки, воздушные полости.

ВВЕДЕНИЕ

В работе нелинейное возбуждение акустической волны двумя звуковыми волнами накачки, распространяющимися в разных направлениях, исследуется в трехфазном морском осадке, то-есть в осадке, который содержит воздушные полости в его жидкой фазе. Известно, что нелинейные осцилляции газовых баббланов приводят к значительному увеличению нелинейных свойств однородных сред [1–4], а также нелинейности морских осадков, содержащих воздушные полости в жидкой фазе [5,6]. В работе [7] нелинейное взаимодействие трех акустических волн рассматривалось в двухфазном морском осадке с однородной жидкой фазой. В настоящей работе нелинейное возбуждение звука в трехфазном морском осадке рассматривается, как и в работе [7], в частотном интервале, где наблюдается значительная дисперсия скорости акустической волны [8–11]. Дисперсия скорости звука препятствует образованию гармоник, что делает возможным наблюдение трехволнового взаимодействия в более ясной форме.

1. ТЕОРИЯ

Задача состоит в нахождении амплитуды акустической волны (ω_3, k_3) , возбужденной звуковыми волнами накачки (ω_1, k_1) и (ω_2, k_2) вследствие нелинейных колебаний воздушных полостей. Частоты и волновые векторы взаимодействующих волн удовлетворяют законам сохранения энергии-импульса

$$\omega_1 + \omega_2 = \omega_3, \quad k_1 + k_2 = k_3.$$

При решении задачи мы основываемся на известной

модели Био, представленной в работе [12] в ясной форме уравнений непрерывности и сохранения импульса для жидкой и твердой фаз

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \rho_{0m} \frac{\partial v}{\partial x} &= 0, \\ \rho_{0m} \frac{\partial v}{\partial t} &= -\frac{\partial p}{\partial x}, \\ \frac{\partial \rho_s}{\partial t} + \rho_{0s} \frac{\partial u}{\partial x} &= 0, \\ (1-m)\rho_{0s} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} - (1-m) \frac{\partial p}{\partial x}. \end{aligned} \quad (1)$$

В этих уравнениях опущены нелинейные гидродинамические слагаемые, поскольку, как было отмечено выше, нелинейные процессы определяются, главным образом, нелинейными осцилляциями воздушных полостей, содержащихся в жидкой фазе осадка. В уравнениях (1) ρ_m — средняя плотность смеси воды и воздуха баббланов; ρ_s — плотность твердого каркаса (в уравнениях индекс «0» относится к равновесным значениям); v и u — скорости жидкой и твердой компонент осадка; p — давление в воде; m — пористость осадка; σ_{xx} — эффективные напряжения в пористой среде (см. работу [12]),

$$\sigma_{xx} = -(k + 4/3\mu) \frac{\partial \rho_s}{\partial \rho_{0s}} + \frac{k}{k_s} p,$$

k и μ — объемный модуль и модуль сдвига пористой среды.

В уравнениях (1) мы можем для простоты ограничиться одномерным случаем, так как углы между тремя волнами достаточно малы. Действительно, численные оценки [7] показывают, что для используемой в данном случае экспериментальной ситуации углы между направлениями распространения соответственно волн (ω_1, k_1) , (ω_2, k_2) и направлением распространения волны (ω_3, k_3) (пусть это будет ось x) равны приблизительно $\theta_1 \approx 25^\circ$ и $\theta_2 \approx 18^\circ$.

Дальнейшие вычисления, выполненные одним из ав-

*E-mail: ljv@msu.srcc.ru

†E-mail: N.Pushkina@mererand.com

торов доклада в работе [13], приводят к уравнениям

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \frac{m}{\rho_{0f} G} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \frac{\nu}{\rho_{0s} G} \frac{\partial^2 \rho_s}{\partial t^2} &= \frac{mn}{G} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial^2 \rho_s}{\partial t^2} (1 - m) - \frac{k + 4/3\mu}{\rho_{0s}} \frac{\partial^2 \rho_s}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь n — концентрация воздушных полостей, V — объем полости. Уравнения (2) должны быть дополнены уравнением для отдельной газовой полости [3]

$$\ddot{V} + \omega_0^2 V + f\dot{V} - \alpha V^2 - \beta(2\dot{V}V + V^2) = \varepsilon p, \quad (3)$$

где ω_0 — резонансная частота бабблтона. Коэффициенты в уравнении (3) выражаются через равновесный объем полости V_0 , его радиус R_0 и показатель адиабаты γ ,

$$\begin{aligned} \alpha &= \omega_0^2(1 + \gamma)/2V_0, \quad \beta = 1/6V_0, \\ \varepsilon &= 4\pi R_0/\rho_{0f}, \quad f = \delta\omega_0, \end{aligned}$$

δ — безразмерный коэффициент поглощения колебаний воздушных полостей.

Как было отмечено выше, для того, чтобы трехволновое взаимодействие наблюдалось наиболее отчетливо,

следует использовать диапазон частот со значительной дисперсией скорости звука. Как и в работе [7], будут использованы экспериментальные данные публикации [8], которые приведены на рис. 2 в статье [11]. Используя эти данные, выберем частоты волн, равные $\omega_1 = 2\pi \cdot 2 \cdot 10^3 c^{-1}$, $\omega_2 = 2\pi \cdot 3 \cdot 10^3 c^{-1}$, для которых суммарная частота равна $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2 = 2\pi \cdot 5 \cdot 10^3 c^{-1}$

Будем искать решение уравнений (2), (3) в форме

$$p_i = 1/2[P_i e^{i(k_i x - \omega_i t)} + \text{к.с.}],$$

$$V_i = 1/2[V_i e^{i(k_i x - \omega_i t)} + \text{к.с.}], \quad i = 1, 2, 3,$$

где P_i, V_i — амплитуды акустических волн и колебаний бабблтонов.

Единственный нелинейный член в уравнениях (2), который обеспечивает нелинейное взаимодействие, это последний член первого уравнения. На самом деле это слагаемое есть сумма линейной части V_i и нелинейной части V_n . Нелинейная часть V_n , ответственная за нелинейное возбуждение волны p_3 волнами p_1, p_2 , может быть получена из уравнения (3) в виде

$$V^n = \frac{[\alpha - \beta(\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_1\omega_2)]\varepsilon^2 p_1 p_2}{(-\omega_3^2 + \omega_0^2 - if\omega_3)(\omega_1^2 - \omega_0^2 + if\omega_1)(\omega_2^2 - \omega_0^2 + if\omega_2)}. \quad (4)$$

При решении уравнения (2) используем так называемое приближение заданного поля, то есть мы пренебрегаем изменениями амплитуд P_1, P_2 вследствие нелинейности и считаем, что их изменения связаны только с линейными осцилляциями полостей, приводящими к дисперсии в среде. Используя соотношение (4), получаем решение уравнения (2) для амплитуд P_1, P_2, P_3 , которые предполагаются медленно меняющимися на расстоянии порядка длины волны,

$$\frac{\partial P_1}{\partial x} = ib_1 P_1, \quad \frac{\partial P_2}{\partial x} = ib_2 P_2, \quad \frac{\partial P_3}{\partial x} = ib_3 P_3 - ia P_1 P_2. \quad (5)$$

В уравнениях (5) использованы следующие обозначения:

$$b_j = \frac{\rho_f n V \omega_j c K / 2\gamma P_0 L}{1 - \omega_j^2 / \omega_0^2 - i\delta_j \omega_j^2 / \omega_0^2}, \quad j = 1, 2, 3,$$

где

$$\begin{aligned} K &= 1 - m - \frac{k + (4/3)\mu}{\rho_s c^2}, \\ L &= K - \frac{\nu^2 \rho_f}{m \rho_s} \left[\frac{k + (4/3)\mu}{\rho_s c^2} K^{-1} + 1 \right], \\ \nu &= 1 - m - k/k_s, \end{aligned}$$

P_0 — равновесное давление в жидкой фракции осадка, которое связано с другими равновесными параметрами воздушной полости формулой $\omega_0^2 = 3\gamma P_0 / \rho_0 R_0^2$.

Величина a в последнем из уравнений (5) есть вершина нелинейного взаимодействия, равная

$$a = \frac{\rho_f n V \omega_3 c K [1 + \gamma - (1/3\omega_0^2)(\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_1\omega_2)]}{4\gamma^2 P_0^2 L (1 - \omega_1^2 / \omega_0^2 - i\delta_1 \omega_1^2 / \omega_0^2) (1 - \omega_2^2 / \omega_0^2 - i\delta_2 \omega_2^2 / \omega_0^2) (1 - \omega_3^2 / \omega_0^2 - i\delta_3 \omega_3^2 / \omega_0^2)}.$$

Как видно из уравнений (5), мнимые части величин b_j определяют диссипацию акустических волн. Эта диссипация связана с потерями энергии вследствие колебаний бабблоннов, и эти потери заметно растут, когда резонансная частота бабблоннов ω_0 приближается к одной из частот взаимодействующих волн. Численные оценки показывают, что в частотном диапазоне, где ω_0 или значительно больше или, наоборот, значительно меньше частот взаимодействующих волн, поглощение волн, вызванное осцилляциями бабблоннов, заметно ниже, чем акустическое поглощение гидродинамической природы, которое не присутствует в уравнениях (5). Но экспериментальная величина этого поглощения должна быть принята во внимание для оцен-

ки реального возможного расстояния взаимодействия волн. Это расстояние не может превышать длин поглощения возбуждающих волн. Амплитудный коэффициент поглощения этих волн равен соответственно $\alpha_1 \approx 0.8 \cdot 10^{-3} \text{см}^{-1}$ и $\alpha_2 \approx 3 \cdot 10^{-3} \text{см}^{-1}$ (см. статью [11]). Это соответствует расстояниям поглощения волн приблизительно $\sim 1250 \text{см}$ и $\sim 330 \text{см}$, и таким образом, расстояние взаимодействия волн не может превышать $\sim 330 \text{см}$.

Если при $x = 0$ амплитуда P_3 возбуждаемой волны на уровне флуктуаций, то есть практически равна нулю, решение уравнений (5) может быть представлено в виде

$$|P_3|^2 = \omega_3^2 |P_1|^2 |P_2|^2 E(x) [1 + \gamma - (1/3\omega_0^2)(\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_1\omega_2)]^2 (4\gamma^2 P_0^2 D)^{-1}, \quad (6)$$

где

$$E(x) = e^{-2Imb_3x} + e^{-2Im(b_1+b_2)x} - 2e^{-2Im(b_1+b_2+b_3)x} \cos[Re(b_1 + b_2 - b_3)x],$$

$$D = \omega_1^2 \Theta_2 \Theta_3 + \omega_2^2 \Theta_1 \Theta_3 + \omega_3^2 \Theta_1 \Theta_2 + 2\omega_1 \omega_2 \Theta_3 \Phi_{1,2} - 2\omega_1 \omega_3 \Theta_2 \Phi_{1,3} - 2\omega_2 \omega_3 \Theta_1 \Phi_{2,3}. \quad (7)$$

В формуле (7) введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \Theta_j &= \alpha_j^2 + \beta_j^2, & \Phi_{j,k} &= \alpha_j \alpha_k + \beta_j \beta_k, & j, k &= 1, 2, 3, \\ \alpha_j &= 1 - \omega_j^2 / \omega_0^2, & \beta_j &= \delta_j \omega_j^2 / \omega_0^2. \end{aligned}$$

2. ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ ПОЛУЧЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Проанализируем полученную амплитуду $|P_3|$ возбужденной волны, а именно, ее зависимость от расстояния при различных резонансных частотах воздушных

полостей и от резонансной частоты полости при фиксированном расстоянии. Для проведения этого анализа и для численных оценок используем следующие значения величин [8,11,14]:

$$\begin{aligned} P_0 &\approx 3 \times 10^6 \text{дин/см}^2, & P_1 = P_2 &\approx 10^5 \text{дин/см}^2, & \gamma &= 1,4, & nV &= 10^{-5}, \\ \omega_1 &= 4\pi \times 10^3 \text{с}^{-1}, & \omega_2 &= 6\pi \times 10^3 \text{с}^{-1}, & \omega_3 &= 10\pi \times 10^3 \text{с}^{-1}, & \delta_j &\approx 4 \times 10^{-2}, \\ \rho_f &= 1 \text{г/см}^3, & \rho_s &= 2,65 \text{г/см}^3, & m &= 0,4, & c &= 1,7 \times 10^5 \text{см/с}, \\ k &= 10^9 \text{дин/см}^2, & \mu &= 5 \times 10^8 \text{дин/см}^2, & k_s &= 3,6 \times 10^{11} \text{дин/см}^2. \end{aligned}$$

Поскольку полученная формула (6) является достаточно сложным алгебраическим выражением, в данной работе проведено численное моделирование поведения амплитуды звуковой волны $|P_3|$ для различных резонансных частот полостей и для различных расстояний. Результаты численного анализа показывают следующее.

1. Зависимость отношения $|P_3|/|P_1|$ от расстояния для резонансной частоты бабблоннов ω_0 , меньшей частот всех трех волн, например, для $\omega_0 = 4\pi \times 10^2 \text{с}^{-1}$. Расстояние меняется в интервале $100 < x < 300 \text{см}$. В этом случае на всем расстоянии величина $|P_3|$ на несколько порядков меньше, чем $|P_1|$.

2. Резонансная частота полости равна одной из частот взаимодействующих волн. Зависимость от отношения $|P_3|/|P_1|$ от расстояния в интервале $100 < x < 300$ см следующая.

(а) $\omega_0 = \omega_1$. Отношение $|P_3|/|P_1|$ по-прежнему остается малым и равно приблизительно $(3,5-3,6) \times 10^{-3}$.

(б) $\omega_0 = \omega_2$. Отношение $|P_3|/|P_1|$ становится больше, порядка 3×10^{-2} , и немного уменьшается с расстоянием из-за поглощения, вызванного осцилляциями полостей.

(с) $\omega_0 = \omega_3$. Отношение $|P_3|/|P_1|$ чуть больше, чем в предыдущих двух случаях, порядка 4×10^{-2} , и слегка уменьшается с расстоянием.

Уменьшение отношения $|P_3|/|P_1|$ с расстоянием в последних трех случаях связано с тем, что частота бабблон в этих случаях всегда в резонансе с одной из частот взаимодействующих волн, что ведет к увеличению потерь. С другой стороны, это свидетельствует о том, что нелинейный процесс в этом диапазоне частот слишком слабый, чтобы преодолеть поглощение.

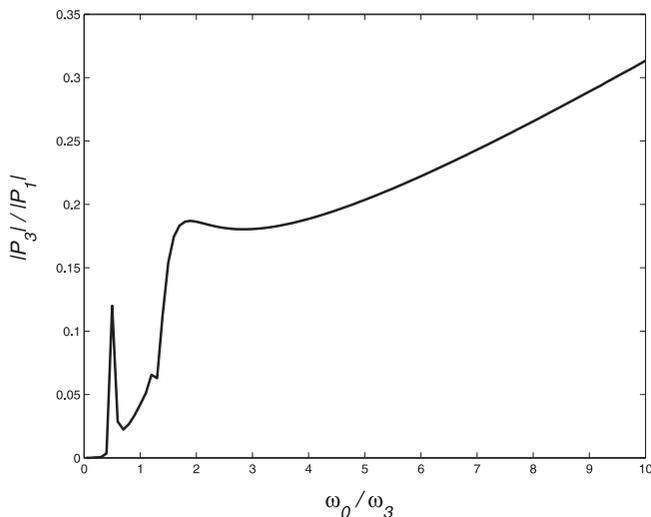


Рис. 1: Зависимость отношения $|P_3|/|P_1|$ от соотношения частот ω_0/ω_3 на расстоянии $x = 300$ см для всего диапазона частот ω_0 , начиная с частот, намного меньших частот взаимодействующих волн вплоть до частот, намного больших частот ω_1 , ω_2 и ω_3

3. Резонансная частота полостей ω_0 больше частот всех взаимодействующих волн, пусть она будет равна $\omega_0 = 4\pi \times 10^4 \text{ с}^{-1}$. Расстояние меняется в интервале $100 < x < 300$ см. В этом случае амплитуда $|P_3|$ медленно растет, начиная со значения $\approx 0,17 |P_1|$, и достигает величины $\approx 0,3 |P_1|$. Это означает, что нелинейные колебания бабблон с высокой резонансной частотой обеспечивают эффективное нелинейное возбуждение звуковой волны с суммарной частотой.

Наконец, исследуем зависимость амплитуды возбужденной волны от резонансной частоты полости.

На рисунке представлена зависимость отношения $|P_3|/|P_1|$ от соотношения частот ω_0/ω_3 на расстоянии $x = 300$ см для всего диапазона частот ω_0 , начиная с частот, намного меньших частот взаимодействующих волн вплоть до частот, намного больших частот ω_1 , ω_2 и ω_3 . Для ω_0 как раз между частотами ω_1 и ω_2 наблюдается узкий пик, который можно объяснить равноудаленностью частоты ω_0 от резонансов с частотами ω_1 и ω_2 . Для $\omega_0 > \omega_3$ начинается практически устойчивый рост амплитуды возбужденной волны $|P_3|$ вплоть до значений $|P_3| \approx 0,3 |P_1|$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Представленные результаты демонстрируют, что рассмотренный акустический процесс очень слабо реагирует на нелинейные колебания воздушных полостей при малых значениях резонансных частот полостей. Однако осцилляции полостей с высокими резонансными частотами существенно влияют на рассмотренное нелинейное взаимодействие. В этом случае амплитуда возбужденной акустической волны может достигать измеримых значений, равных десятым долям амплитуд накачки на разумных расстояниях. Диапазон частот, где резонансная частота бабблон ω_0 совпадает с частотами звуковых волн, не является благоприятным для нелинейного акустического взаимодействия не только из-за возрастания потерь, когда осцилляции полостей попадают в резонанс с взаимодействующими звуковыми волнами, но также и потому, что ω_0 недостаточно велика в таком диапазоне частот для обеспечения эффективного нелинейного акустического взаимодействия.

[1] Заболотская Е.А., Солюян С.И. Акуст. ж. **13**, №2. С. 296. (1967).
 [2] Welsby V.G. and Safar M.H. Acustica **22**, P.177. (1969/70).
 [3] Заболотская Е.А., Солюян С.И. Акуст. ж. **19**, №5. С. 690. (1973).
 [4] Junru Wu and Zheming Zhu J. Acoust. Soc. Am. **89**, N 6. P. 2634. (1991).

[5] Донской Д.М., Сутин А.М. Акуст. ж. **30**, №5. С. 605. (1984).
 [6] Boyle F.A. and Chotiros N.P. J. Acoust. Soc. Am. **103**. N 5. P. 1328. (1998).
 [7] Pushkina N.I. Phys. Wave Phen. **20**, N 3. P. 204 (2012).; Proceedings of the International symposium on Elastic Wave Effect on Fluid in Porous Media. p.60. (Moscow, 2012).

- [8] *Turgut A. and Yamamoto T.* J. Acoust. Soc. Am. **87**, N 6. P. 2376. (1990). (2006).
- [9] *Stoll R.D.* J. Acoust. Soc. Am. **111**, N 2. P. 785. (2002). [12] *Быков В.Г., Николаевский В.Н.* Акуст. ж. **36**, № 4. С. 606. (1990).
- [10] *Chotiros N.P. and Isakson M.J.* J. Acoust. Soc. Am. **116**. N 4. P. 2011. (2004). [13] *Пушкина Н.И.* Акуст. ж. **47**, № 2. С. 259. (2001).
- [11] *Buchanan J.L.* J. Acoust. Soc. Am. **120**, N 6. P. 3584. [14] *Medwin H.* Ultrasonics. **15**, N 1. P. 7. (1977).

Nonlinear acoustic-wave interaction in a three-phase medium

Ya.M. Zhileikin^a, A.B. Kukarkin^a, N.I. Pushkina^b

Research Computing Center, M. V. Lomonosov Moscow State University, Moscow 119991, Russia

E-mail: ^alju@msu.srcc.ru, ^bN.Pushkina@mererand.com

Nonlinear generation of an acoustic wave by two pump sound waves is studied in a three-phase marine sediment that consists of a solid frame and the pore water with air bubbles in it. To avoid generation of harmonics the interaction is studied in the frequency range where there is a considerable wave velocity dispersion. Nonlinear equations are obtained to describe the interaction of acoustic waves in the presence of air bubbles. An expression for the amplitude of the generated wave is obtained and its dependence on distance and on resonance frequencies of bubbles is numerically analyzed.

PACS: 43.25.+y.

Keywords: nonlinear interactions, marine sediments, air bubbles.

Received 27.10.2014.

Сведения об авторах

1. Жилейкин Яков Михайлович — докт. физ.-мат. наук, профессор, заведующий лабораторией; тел.: (495) 939-23-33, e-mail: lju@msu.srcc.ru.
2. Кукаркин Алексей Борисович — канд. физ.-мат. наук, старший научный сотрудник; тел.: (495) 939-23 -33, e-mail: lju@msu.srcc.ru
3. Пушкина Нинель Ивановна — докт. физ.-мат. наук, старший научный сотрудник, ведущий научный сотрудник; тел.: (495) 939-30-15, e-mail: N.Pushkina@mererand.com.