

Свойства вязких плоских и цилиндрических одномерных волн в свободном пространстве и в зазорах

А. С. Павловский* Н. Г. Семенова†

Санкт-Петербургский государственный университет,
физический факультет, кафедра радиофизики,
Россия, 198504, Санкт-Петербург, Ульяновская, д. 3
(Статья поступила 07.11.2014; Подписана в печать)

Исследованы аналитически и численно ослабление вязких одномерных волн, их фазовые скорости, пространственная и частотная дисперсии в свободном пространстве. Дисперсия фазовой скорости цилиндрической волны в свободном полупространстве является отрицательной. Градиент фазовой скорости тем больше, чем меньше волновой размер источника. С увеличением его размеров дисперсия в пределе исчезает, а фазовая скорость приближается к значению скорости для плоской волны. Величина фазовой скорости и расстояние, на котором проявляется дисперсия, зависят от волновых размеров источника вязких волн. Ослабление в зазоре вязких волн как плоских, так и цилиндрических, величины их фазовых скоростей, законы дисперсии зависят от волновой толщины зазора и от граничных условий на стенке, противоположной источнику.

PACS: 43.20.-f, 43.35.Mg

УДК: 534.2

Ключевые слова: вязкие волны, фазовая скорость, частотная и пространственная дисперсии.

ВВЕДЕНИЕ

В настоящей работе численно исследованы поля колебательных скоростей, ослабление и скорости распространения поперечных плоских и цилиндрических вязких волн от конечного размера источников в ограниченных объёмах жидкости в задачах с различными граничными условиями. Так же исследована плоская вязкая волна, возникающая при гармоническом колебании потенциального потока вязкой несжимаемой жидкости в зазоре, ограниченном неподвижными пластинами, на которых выполняется условие прилипания.

Решается полная нестационарная нелинейная система уравнений, описывающих движение вязкой несжимаемой жидкости. Скорость \mathbf{V} движения вязкой несжимаемой жидкости, создаваемого источниками произвольного размера и формы, описывается решением системы из уравнения движения жидкости и закона сохранения массы:

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V}, \nabla) \mathbf{V} = -\frac{\nabla P}{\rho} + \nu \Delta \mathbf{V}, \quad (1)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{V} = 0. \quad (2)$$

Аналитические решения получены в [1, 2] для линеаризованного уравнения движения для гармонических источников бесконечного размера

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} = \nu \Delta \mathbf{V}. \quad (3)$$

В случае осциллирующих по закону $V_0 \exp(-i\omega t) \cdot \tau$ по тангенциальной координате источников, таких как бесконечная пластина или цилиндр (рис. 1), решения имеют вид (4, 5). Колебательная скорость плоской волны, бегущей в направлении r , в свободном пространстве

$$V = V_0 \exp(ikr - i\omega t), \quad (4)$$

$$\operatorname{Re} V = V_0 \exp\left(-\frac{r}{\delta}\right) \cos\left(\omega t - \frac{r}{\delta}\right).$$

Колебательная скорость цилиндрической волны, бегущей в радиальном направлении, в свободном пространстве

$$V = V_0 \left(H_1^{(1)}(kr) / H_1^{(1)}(kr_0) \right) \exp(-i\omega t). \quad (5)$$

Заметим, что в [2] в аргументе функции Ханкеля пропущен множитель $\sqrt{2}$.

Одномерные решения (4, 5) получены при условиях прилипания вязкой жидкости на колеблющейся поверхности источника и убывании скорости жидкости до нуля на бесконечности. Здесь обозначено $\delta = \sqrt{2\nu/\omega}$ — толщина пограничного слоя, расстояние, на котором амплитуда плоской волны убывает в e раз; $\nu = \eta/\rho$ — кинематическая и η — сдвиговая вязкости, ρ — плотность среды. Комплексное волновое число вязкой волны

$$k = \frac{\omega}{c_{ph}} (1 + i) = \frac{1 + i}{\delta} = \frac{2\pi}{\lambda} (1 + i) = |\nabla\Phi| (1 + i), \quad (6)$$

где $c_{ph} = \omega\delta$ — фазовая скорость плоской вязкой волны, $|\nabla\Phi|$ — градиент фазы.

*E-mail: artyom.pavlovskiy@gmail.com

†E-mail: tatabukamena@rambler.ru

Методика исследования вязких волн от источника конечных размеров r_0 в свободном пространстве или в зазорах толщиной меньше длины вязкой волны сводилась к численному решению системы (1, 2) методом конечных элементов в Comsol Multiphysics 4.3 с различными граничными условиями и нулевыми начальными. Результатом решения являлась пространственно-временная зависимость вектора колебательной скорости жидкости. Сравнение численного и аналитического решений проводилось в Matlab R2011. Это сравнение для цилиндрических волн, распространяющихся в свободном пространстве, показало возможность замены (1) на уравнение (3) для источников с достаточно большими размерами $r_0/\delta > 0,1$. Относительная методическая погрешность численного моделирования составила менее 0,1%.

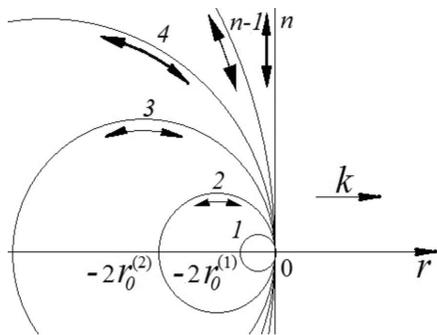


Рис. 1: Геометрия задачи и обозначения. 1, 2, 3, ..., $(n-1)$ — бесконечные круговые цилиндры различных радиусов $r_0^{(n)}$, осциллирующие с частотой ω по стрелкам; n — бесконечная пластина. Волновой вектор \mathbf{k} вязкой волны направлен по \mathbf{r}

1. ОСЛАБЛЕНИЕ ПЛОСКИХ И ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ВЯЗКИХ ВОЛН

На рис. 2 представлены рассчитанные по аналитическим выражениям (4) и (5) кривые ослабления относительной колебательной скорости для плоской и цилиндрической вязких волн в свободном пространстве. Кроме поглощения средой, как для плоской волны, убывание которой обусловлено только поглощением $1/\delta$, ослабление цилиндрической волны происходит за счет дифракционной расходимости. Причем, как один, так и второй механизм зависят от кривизны фронта волны. Поэтому собственно поглощение цилиндрической волны в одной и той же среде больше поглощения плоской. Это связано с тем, что в поперечной волне расстояние, на котором частица среды передает свою энергию вязкой среде с последующим переходом в тепло (необратимые потери), тем больше, чем больше радиус кривизны. Численный счет в диапазоне 1–100 Гц показал, что ослабление цилиндрической и плоской волн зависит от частоты как $1/\delta \sim \sqrt{\omega}$. Частотные зависимости квадратов коэффициентов ослабления $(V_0/V)^2$

для плоской и цилиндрической волн прямо пропорциональны волновому расстоянию от источника с коэффициентом пропорциональности, большим для цилиндрической волны.

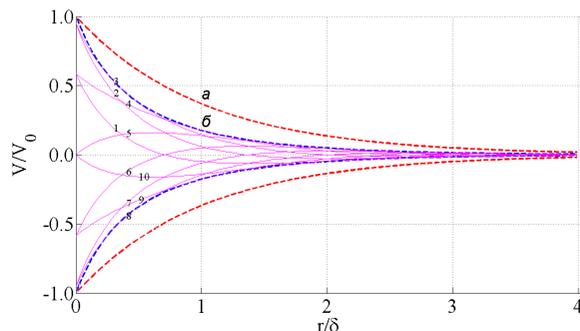


Рис. 2: Огибающие плоской (а) и цилиндрической (б) вязких волн, распространяющихся в свободном пространстве, и пространственно-временные зависимости (тонкие линии 1–10) колебательной скорости цилиндрической вязкой волны за период колебаний с шагом $T/10$. Размер цилиндрического источника $r_0/\delta = 0,5$

В зазорах (рис. 3), ограниченных тангенциально колеблющейся поверхностью источника и абсолютно жесткой неподвижной стенкой, плоские и цилиндрические вязкие волны испытывают большее ослабление (кривые 1–5), по сравнению со свободным пространством (кривая 6). Ослабление увеличивается с уменьшением толщины зазора. В зазорах толщиной меньше δ поле колебательных скоростей убывает почти линейно. Это происходит в связи с необходимостью выполнения нулевого граничного условия на неподвижной жесткой стенке. Поле колебательной скорости жидкости в зазорах, толщина которых меньше длины вязкой волны, сформировано падающей и отраженной в противофазе волнами с ненулевыми амплитудами. Аналитические выражения для колебательной скорости жидкости в зазоре толщиной h для плоской волны

$$V = V_0 \frac{\exp(ik(h-x)) - \exp(ik(x-h))}{\exp(ikh) - \exp(-ikh)} \cdot \exp(-i\omega t),$$

и для цилиндрической волны

$$V = V_0 \frac{H_1^{(1)}(kr) H_1^{(2)}(kr_1) - H_1^{(2)}(kr) H_1^{(1)}(kr_1)}{H_1^{(1)}(kr_0) H_1^{(2)}(kr_1) - H_1^{(2)}(kr_0) H_1^{(1)}(kr_1)} \times \exp(-i\omega t).$$

где $r_1 = r_0 + h$.

Замена абсолютно жесткой стенки на мягкую (свободную) границу в зазоре приводит к уменьшению ослабления вязких волн по сравнению с ослаблением в ранее рассмотренных случаях. Вязкая волна от свободной границы отражается в фазе. Амплитуда вязкой

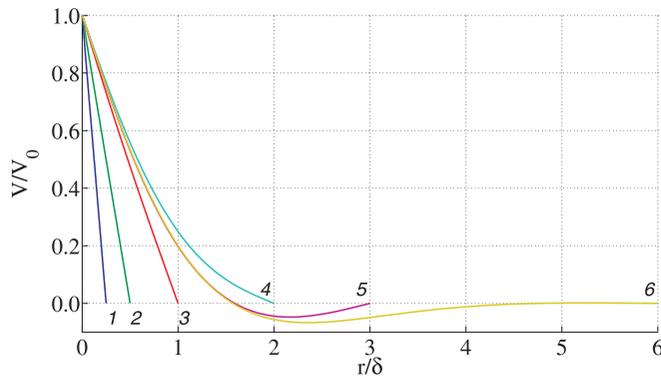


Рис. 3: Зависимость мгновенной колебательной скорости плоской вязкой волны от координаты вдоль толщины зазора для различных значений h/δ : 1 — $h/\delta = 0,25$; 2 — $h/\delta = 0,5$; 3 — $h/\delta = 1$; 4 — $h/\delta = 2$; 5 — $h/\delta = 3$; 6 — $h/\delta = 6$. Кривой 6 соответствует экспоненциальное убывание плоской волны в свободном пространстве. Момент времени $t/T = 0,25$

волны на ней удваивается по сравнению с амплитудой волны в свободном пространстве на том же расстоянии от источника. Ослабление приводит к тому, что в зазорах классических стоячих волн не образуется. Плоские и цилиндрические вязкие волны в свободном пространстве и в зазорах распространяются с различными фазовыми скоростями.

2. СКОРОСТЬ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ПЛОСКИХ И ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ПОПЕРЕЧНЫХ ВЯЗКИХ ВОЛН

Обычно фазовую скорость волны определяют по скорости перемещения точек одинаковой фазы за интервал времени Δt . При численном решении (1, 2) и в натурных экспериментах возможно определить только вещественную часть функции зависимости колебательной скорости жидкости. Экстремумы вещественной части колебательной скорости плоской волны в свободном пространстве (4) соответствуют фазе $\Phi = 3\pi/4$, в чем можно убедиться, построив годограф этой комплексной гармонической функции. При изменении времени на Δt экстремумы перемещаются на расстояние Δr_{extr} . Таким образом, методика определения фазовой скорости плоской вязкой волны сводилась к следующим шагам. Получаем вещественную зависимость колебательной скорости цилиндрической волны с расстоянием от источника и от времени (рис. 2, тонкие линии). Находим координаты экстремумов r_{extr} этой зависимости при изменении времени в течение периода колебаний T с шагом Δt . Вычисляем перемещение экстремумов Δr_{extr} за время Δt для всех r_{extr} . Вычисляем фазовую скорость по формуле

$$c_{ph} = \frac{\Delta r_{extr}}{\Delta t}.$$

При выборе оптимального соотношения выборок по пространству и времени относительная методическая погрешность не превосходит 1%.

Для цилиндрической вязкой волны в свободном пространстве и для обеих волн в зазорах экстремумы вещественной части зависимости колебательной скорости жидкости от расстояния соответствуют различным фазам. Сама фаза зависит от волновых размеров источника и волнового расстояния до точки наблюдения. Поэтому правильнее определять фазовую скорость через градиент контролируемой фазы

$$c_{ph} = \frac{\omega}{|\nabla\Phi|},$$

где фаза комплексного числа $\Phi = \arctg(\text{Im } V / \text{Re } V)$. У годографа комплексной гармонической функции (5) мнимая часть опережает вещественную на $\pi/2$, т. е. на время $T/4$. Поэтому в установившемся режиме за мнимую часть принимается вещественная часть той же зависимости через время $T/4$. Для цилиндрических волн и волн в зазорах вдали от границ обе методики дают величины фазовых скоростей, совпадающие с точностью более 0,1%. Вблизи границ дисперсионные зависимости фазовой скорости совпадают только качественно.

Частотная зависимость фазовой скорости радиально-симметричных колебаний цилиндра такая же, как у плоской волны, и описывается зависимостью $c_{ph}(\sqrt{\omega})$. Однако абсолютные значения фазовых скоростей различаются: для рассмотренных колебаний источника фазовая скорость цилиндрической волны всегда превышает фазовую скорость плоской. Возможные величины фазовой скорости зависят от волнового размера источника при прочих постоянных условиях. По вышеописанным методикам нами численно рассчитана фазовая скорость для плоской и цилиндрической волн в свободном пространстве и в зазорах. Результаты расчета, нормированные на аналитическое выражение для фазовой скорости плоской вязкой волны (6), представлены на рис. 4. Видно, что фазовая скорость цилиндрической волны в свободном пространстве испытывает пространственную дисперсию вблизи источника на расстояниях, меньших δ , т. е. меньших $kr < 1$ (кривая 2). На расстояниях, превышающих толщину пограничного слоя, зависимость фазовой скорости от расстояния пропадает. Дисперсия фазовой скорости цилиндрической волны в свободном полупространстве является отрицательной. Градиент фазовой скорости тем больше, чем меньше волновой размер источника. С увеличением его размеров дисперсия в пределе исчезает, а фазовая скорость приближается к значению скорости для плоской волны.

По тем же методикам, что и для волн в свободном пространстве, найдены фазовые скорости плоской и цилиндрической волн для зазора с одной неподвижной границей. Результаты расчета показаны на рис. 4 (кривые 1 и 3). Видно, что наличие неподвижной границы приводит к проявлению положительной

пространственной дисперсии у обеих волн при приближении к ней. На рис. 5 представлены результаты 4-х опытов с разными толщинами зазоров от 1δ до 4δ . Источник расположен во всех опытах в начале координат. Видно, что фазовая скорость цилиндрической волны в достаточно толстом зазоре сначала падает до скорости плоской, а затем, приближаясь к неподвижной границе, растет с тем же градиентом, что и изначально плоская волна (опыт 4 рис. 5). Когда зазор тонко ($h/\delta \leq 1$), то фазовая скорость цилиндрической волны убывает. Затем, не достигая скорости плоской волны, возрастает (опыт 1 рис. 5). Из рис. 4 (кривые 1 и 3) видно, что градиенты фазовой скорости плоской и цилиндрической волн при приближении к неподвижной стенке практически одинаковые.

При уменьшении зазора фазовая скорость цилиндрической волны возрастает и тем больше, чем тоньше зазор. В малом зазоре $h/\delta < 0,5$ волновой процесс практически прекращается, жидкость колеблется почти синфазно с источником, что отражают численные эксперименты.

Моделирование плоской вязкой волны в зазоре, ограниченном свободной границей, показало, что плоская вязкая волна, возбужденная осциллирующей в своей плоскости поверхностью, распространяется перпендикулярно свободной поверхности, на которой выполняется граничное условие непроникновения

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \mathbf{n}} = 0. \quad (7)$$

При приближении к свободной поверхности фазовая скорость волны испытывает положительную пространственную дисперсию, что показывает кривая 4 на рис. 4.

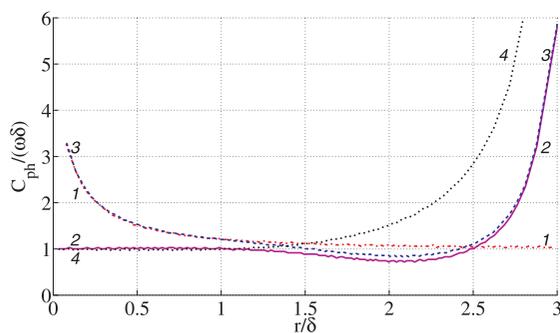


Рис. 4: Пространственные зависимости фазовых скоростей, нормированных на фазовую скорость плоской волны. 1 — цилиндрической вязкой волны в свободном пространстве, 2 — плоской вязкой волны в зазоре с неподвижной жесткой стенкой толщиной $h/\delta = 3$, 3 — цилиндрической вязкой волны в зазоре с неподвижной жесткой стенкой толщиной $h/\delta = 3$, 4 — плоской вязкой волны в зазоре той же толщины, ограниченном свободной границей

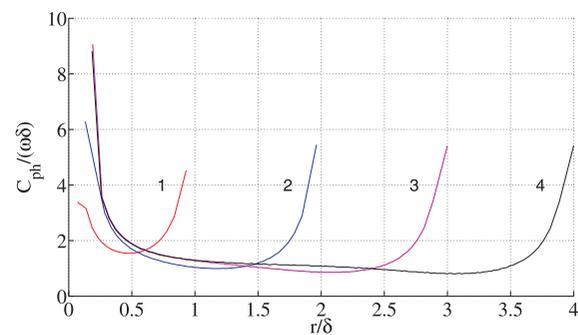


Рис. 5: Пространственная дисперсия фазовой скорости цилиндрической волны в зазорах с толщинами 1 — $h/\delta = 1$, 2 — $h/\delta = 2$, 3 — $h/\delta = 3$, 4 — $h/\delta = 4$

3. ПОЛЕ ПЛОСКИХ ВЯЗКИХ ВОЛН, СФОРМИРОВАННОЕ ОСЦИЛЛИРУЮЩИМ ПОТЕНЦИАЛЬНЫМ ПОТОКОМ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ В ЗАЗОРЕ С НЕПОДВИЖНЫМИ СТЕНКАМИ

Теперь обсудим следующий численный эксперимент. Пусть в зазоре с неподвижными стенками плоской геометрии осциллирует потенциальный поток той же жидкости. Для этого создадим на краях зазора колеблющийся по закону $\exp(-i\omega t)$ градиент давления. Расстояние между краями зазора выберем много большим толщины зазора, но много меньшим длины продольной упругой волны в жидкости. Численно решая нестационарную систему (1, 2), найдем поле колебательных скоростей вязкой плоской волны (рис. 6, зеленые точки) для некоторых моментов времени, превышающих время установления поля скорости (более 10 периодов колебаний). Видно, что при граничных условиях прилипания экстремумы колебательной скорости приходятся на середину зазора. Оказалось, что на расстоянии δ от неподвижной стенки амплитуда колебательной скорости жидкости в плоской волне при осцилляции потока составляет $0,63 V_0$.

На рис. 6. приведены пространственно-временные распределения колебательных скоростей вязкой волны, вызванной осциллирующим потенциальным потоком в зазоре с неподвижными стенками (зеленые точки) и для ситуации, когда зазор образован двумя синфазно осциллирующими плоскими пластинами в отсутствие потока при прочих равных условиях (черные точки). Для этого распределение колебательных скоростей в зазоре с синфазно колеблющимися пластинами определено в подвижной системе координат, в которой скорости пластин равны нулю. Толщина зазоров $h/\delta = 6$. Видно, что колебательные скорости жидкости в обеих ситуациях совпадают с точностью более 0,1%. Это позволило предположить справедливость выполнения условия (7) посередине зазора.

Согласно вышеописанной методике определения фазовых скоростей для плоских волн следили за

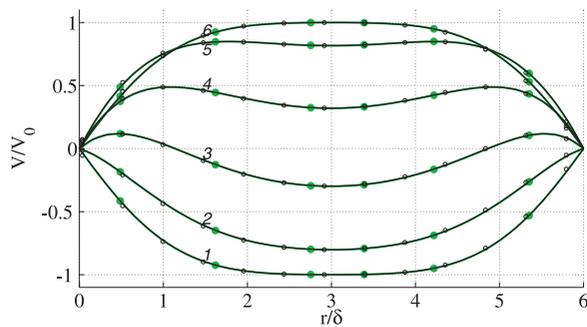


Рис. 6: Сравнение пространственно–временных зависимостей колебательной скорости жидкости в зазорах. Зеленые точки соответствуют гармоническим колебаниям потенциального потока вязкой несжимаемой жидкости вдоль неподвижных плоских пластин, отстоящих на расстояние $h/\delta = 6$ одна от другой, Черные точки — гармоническому синфазному колебанию плоских пластин при прочих равных условиях. Параметром кривых является момент времени 1 — $t/T = 0$; 2 — $t/T = 0,1$; 3 — $t/T = 0,2$; 4 — $t/T = 0,3$; 5 — $t/T = 0,4$; 5 — $t/T = 0,5$

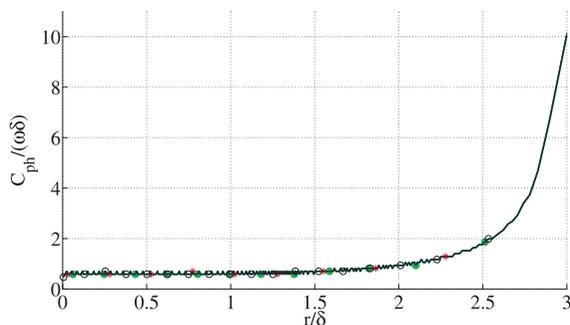


Рис. 7: Дисперсионные кривые фазовой скорости вязких волн с рис. 6. Зеленые и черные точки — обозначения те же, что на рис. 6. Середина зазора соответствует абсциссе $r/\delta = 3$. Зависимость в правой половине зазора зеркально-симметричная. Крестики — фазовая скорость плоской волны в зазоре толщиной 3δ , ограниченном мягкой границей

перемещениями экстремумов колебательной скорости $\frac{dV}{dr} = 0$. Оказалось, что они перемещаются в обеих задачах к центру зазора от границ раздела твердое тело–жидкость, движущихся с относительными тангенциальными скоростями, и определяют этим направление волнового вектора. На рис. 7 приведены дисперсионные кривые фазовых скоростей вязких волн для

обсуждаемых двух ситуаций. Видно, что дисперсия скорости волн наблюдается в середине зазора, посередине потенциального потока, где справедливо условие (7), и при этом она положительна. Величина фазовой скорости посередине зазора в разы превышает ее значение вблизи его границ. Для сравнения на рис. 7 приведены аналогичные зависимости для плоской вязкой волны в зазоре, ограниченном свободной границей. Обращает на себя внимание совпадение дисперсионных кривых фазовых скоростей, а также совпадение относительных величин фазовых скоростей с погрешностью менее 1%.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе исследованы свойства одномерных плоских и цилиндрических вязких волн в свободном пространстве и в зазорах с разными граничными условиями. Показано, что относительные тангенциальные скорости жидкости и твердого тела обязательно приводят к генерации поперечных вязких волн. Волновые вектора направлены по внешней нормали к твердой поверхности.

Ослабление цилиндрической вязкой волны в свободном пространстве превышает поглощение плоской не только из-за дифракционной расходимости, но и из-за большего поглощения. В зазорах же толщиной меньше 2-х толщин пограничного слоя ослабление вязкой волны в жидкости той же вязкости определяется ещё и граничными условиями на стенках.

Фазовая скорость цилиндрической волны на малых расстояниях от источника обнаруживает отрицательную пространственную дисперсию при распространении в свободном пространстве (в отличие от плоской). Однако в зазоре и плоская, и цилиндрическая волны при приближении к стенке с граничными условиями Дирихле или Неймана проявляют положительную дисперсию. Величина градиента фазовой скорости зависит от типа граничных условий. При этом фазовая скорость цилиндрической волны сохраняет отрицательную дисперсию вблизи источника.

Потенциальный поток, осциллирующий в плоском зазоре с неподвижными стенками, генерирует плоские вязкие волны, волновые вектора которых направлены от стенок к середине зазора, а вектора плотности потока импульса им навстречу. Пространственная дисперсия этих плоских волн положительна и сосредоточена в середине зазора.

[1] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. Т. 6. (М.: Наука, 1986).

[2] Грачёв Б.Е., Козырев Л.Е., Семёнова Н.Г. Акуст. журн.

31, вып. 5. С. 672. (1985).

Properties of plane and cylindrical one-dimensional viscous waves in free space and in a gap

A. S. Pavlovskii^a, N. G. Semenova^b

Department of Radioscience, Faculty of Physics, St.Petersburg State University, Saint-Peterburg 198504, Russia
E-mail: ^aartiom.pavlovskiy@gmail.com, ^btatabukamena@rambler.ru

The weakening of one-dimensional transverse viscous waves, their phase velocities, the spatial and frequency dispersion in free space by analytical and numerical methods were researched. The dispersion of the phase velocity in a cylindrical wave in a free half-space is negative. The gradient of the phase velocity is greater when the source wave size is less. With the increase in its size dispersion vanishes in the limit and the phase velocity approaches the value of the plane wave phase velocity. The weakening both flat and cylindrical viscous waves in a gap, the magnitude of their phase velocities, the dispersion laws depend on the wave width of a gap and on the boundary conditions on the source opposite the wall.

PACS: 43.20.-f, 43.35.Mr

Keywords: viscous waves, phase speed, frequency and spatial dispersion.

Received 07.11.2014.

Сведения об авторах

1. Павловский Артём Сергеевич — инженер-исследователь физического факультета СПбГУ; тел.: (921) 388-03-14, e-mail: artem.pavlovskiy@gmail.com.
2. Семёнова Наталия Глебовна — канд. физ.-мат. наук, доцент; тел.: (911) 938-37-60, e-mail: tatabukamena@rambler.ru.