

Энергия, импульс и потенциальные акустические течения в идеальной среде

М.А. Миронов*

Акустический институт имени акад. Н. Н. Андреева, Россия, 117036, Москва, ул. Шверника, д. 4
(Статья поступила 09.11.2014; Подписана в печать)

Рассмотрены два интересных эффекта в идеальной среде. Первый эффект состоит в следующем. При движении тела в идеальной среде среда обладает энергией и импульсом, определяемыми присоединенной массой тела. Оказывается, что энергия среды сосредоточена непосредственно около тела, тогда как импульс размещается на бесконечности. Второй эффект относится к акустическим течениям. При колебаниях поверхности в идеальной среде, при условии потенциальности поля скорости, около нее могут существовать акустические течения — стационарные потоки вещества.

PACS: 47.15.K, 47.15.km, 43.25.Nm

УДК: 532.5.031, 534.213

Ключевые слова: присоединенная масса, энергия, импульс, акустические течения.

ВВЕДЕНИЕ

В гидродинамике идеальной среды известен парадокс Даламбера — на равномерно движущееся тело в идеальной среде не действует сила сопротивления — она равна нулю (см. напр. [1]). Ниже рассмотрены еще два парадоксальных эффекта. Первый — энергия и импульс тела, движущегося в идеальной среде, находятся в разных местах: энергия — около тела, импульс на бесконечно большом удалении от него. Таким образом, можно говорить о нелокальности гидродинамики. Второй — как оказывается, в идеальной среде возможно существование акустических течений при потенциальном обтекании средой колеблющейся поверхности. Эти течения не связаны с вязкостью, или, более обще — с поглощением акустической энергии.

Рассмотрение первого эффекта начнем с напоминания основ механики (законов Ньютона). Масса тела m вводится как коэффициент пропорциональности между ускорением тела $\ddot{\xi}$ и силой, действующей на тело F : $F = m \cdot \ddot{\xi}$ — второй закон Ньютона. Проинтегрировав это уравнение по времени, получим связь импульса P тела со скоростью движения тела $\dot{\xi}$: $P(t) = \int_0^t F(t) dt = m \cdot \dot{\xi}$. Умножив уравнение второго закона Ньютона на скорость и проинтегрировав по времени, получим выражение для кинетической энергии E , приобретенной за время действия силы: $E = m \int_0^t \dot{\xi} \cdot \ddot{\xi} dt = \frac{1}{2} m \dot{\xi}^2$. Продифференцировав это равенство по скорости, получим фундаментальное соотношение, используемое в аналитической механике — связь импульса с энергией:

$$P = \partial E / \partial \dot{\xi} = m \cdot \dot{\xi}. \quad (1)$$

Это соотношение лежит в основе механики системы многих взаимодействующих тел — механике Лагранжа и Гамильтона.

Приведенные выше формулы справедливы и для тел, движущихся в идеальной несжимаемой среде. Движение среды, вызванное телом, обладает энергией и импульсом. Для их вычисления достаточно к собственной массе тела добавить его присоединенную массу. Казалось бы, этой присоединенной массе должны соответствовать энергия и импульс среды, движущейся около тела. Формальные вычисления дают соотношение (1) между энергией, импульсом и присоединенной массой среды (см. напр. [1]). Однако физически энергия и импульс среды находятся, как оказывается, в разных местах: энергия — около движущегося тела, импульс — на бесконечном расстоянии от тела. Ниже приведены формулы для расчета присоединенной массы, присоединенной энергии и присоединенного импульса для шара, движущегося в идеальной несжимаемой среде, и на этом примере проанализированы все особенности распределения энергии и импульса в среде при движении тела. Все используемые ниже формулы приведены в учебниках по гидродинамике (напр. в [1]).

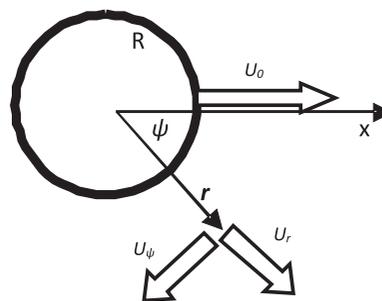


Рис. 1: Геометрия задачи о движении шара в идеальной несжимаемой среде

Шар радиусом R движется со скоростью U_0 вдоль оси x в идеальной несжимаемой среде (рис. 1). Течение предполагается потенциальным. Радиальная U_r и угловая U_ψ компоненты скорости, удовлетворяющие равенству нормальной скорости среды и нормальной скорости поверхности шара S равны:

*E-mail: mironov@akin.ru

$$U_r = U_0 [R^3/(r^3)] \cos \psi, \quad U_\psi = U_0 [R^3/(2r^3)] \sin \psi.$$

Зная поле скорости, можно вычислить распределение плотности кинетической энергии $\varepsilon = \rho U^2/2$ и распределение плотности импульса $\mathbf{p} = \rho \cdot \mathbf{U}$ в среде. Проинтегрировав по всему пространству эти плотности, можно найти и суммарные энергию E и импульс \mathbf{P} среды. Вычисление полной кинетической энергии среды $E = (\rho/2) \int U^2 dV$ не встречает никаких проблем. Элемент объема dV в сферической системе координат равен $dV = 2\pi r^2 \sin \psi d\psi$. Возведение $U_{r,\psi}$ во вторую степень дает под интегралом r^{-6} под интегралом и при умножении на множитель r^2 из элементарного объема получим степенную зависимость от радиуса r^{-4} . Интеграл по r в интервале $[R, \infty]$ сходится и после интегрирования по углу получается известное выражение для кинетической энергии среды при движении шара со скоростью U_0 :

$$E = (2\pi/3) R^3 \frac{1}{2} \rho \cdot U_0^2. \quad (2)$$

Коэффициент пропорциональности перед $\rho U_0^2/2$ в правой части (2) равен присоединенной массе шара M :

$$M = (2\pi/3) R^3 \rho. \quad (3)$$

Отметим, что кинетическая энергия среды сосредоточена вблизи шара. Вклад области среды, находящейся вне сферы радиусом r быстро убывает — пропорционально $(R/r)^3$. Например, при $r = 2R$ этот вклад равен $1/8$, а при $r = 3R$ — $1/27$.

А что будет с импульсом среды? В теоретической механике импульс определяется как производная кинетической энергии по скорости (формула (1)). Дифференцирование здесь — векторная операция и импульс тела массы m , движущейся вдоль оси x со скоростью U_0 , равен $\mathbf{P} = (P_x, P_y, P_z) = (mU, 0, 0)$. Таким же образом можно действовать и при вычислении присоединенного импульса. Кинетическую энергию присоединенного движения среды E (2) дифференцируем по скорости и получаем присоединенный импульс (см. напр. [1]). Этот импульс и приписывается окружающей среде. Однако непосредственное вычисление полного импульса среды путем интегрирования плотности импульса по объему, приводит к неудовлетворительному результату. Вот что написано в комментарии по этому поводу в [1] (параграф 11, стр. 51): «Следует заметить, что вычисление импульса непосредственно как интеграла $\int \rho \mathbf{U} dV$ по всему объему жидкости было бы невозможно. Дело в том, что этот интеграл расходится в том смысле, что результат интегрирования по большой области, размеры которой затем устремляются к бесконечности, мы получили бы значение, зависящее от формы области (сфера,

цилиндр и т. п.). Используемый же нами способ вычисления импульса из соотношения $\mathbf{U} d\mathbf{P} = dE$ приводит ко вполне определенному конечному значению, заведомо удовлетворяющему физическому условию о связи изменения импульса с действующими на тело силами.»

Расходимость интеграла, о которой говорится в этой цитате, действительно имеет место. Поле скорости убывает как $1/r^3$. После умножения на элемент объема $dV = 2\pi r^2 \sin \psi d\psi$ придется интегрировать интеграл $\int (1/r) dr$, который, как известно, расходится. С другой стороны, при интегрировании по углу ψ в пределах $[0, \pi]$ получается нуль при всех значениях r . Однако наличие этого математического парадокса и невозможность непосредственного вычисления импульса среды не отменяет самой картины распределения плотности импульса в пространстве около движущегося шара и заставляет рассмотреть физическую сторону проблемы.

Вычислим x -компоненты поля скорости:

$$\begin{aligned} U_x &= U_r \cos \psi - U_\psi \sin \psi = U_0 \frac{R^3}{r^3} \left[\cos^2 \psi - \frac{1}{2} \sin^2 \psi \right] = \\ &= U_0 \frac{R^3}{r^3} \left[\frac{3}{2} \cos^2 \psi - \frac{1}{2} \right]. \end{aligned}$$

Записываем интеграл по объему:

$$P_x = \rho U_0 \int_{r_1}^{r_2} \frac{R^3}{r^3} \left\{ \int_{\psi_1}^{\psi_2} \left[\frac{3}{2} \cos^2 \psi - \frac{1}{2} \right] \sin \psi d\psi \right\} r^2 dr. \quad (4)$$

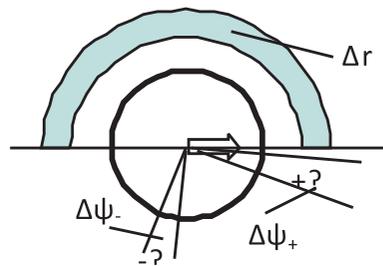


Рис. 2: К вычислению распределения импульса около движущегося шара

Функция под интегралом (4), это пространственное — угловое и радиальное — распределение импульса в пространстве вокруг шара. Для того, чтобы определить импульс в некоторой конечной области пространства, нужно вычислить интеграл по этой области пространства (рис. 2). Например, в кольце с фиксированным радиусом r и шириной Δr в угловом диапазоне $\psi \in [0, \pi]$ импульс равен нулю, так как интеграл $\int_0^\pi \left[\frac{3}{2} \cos^2 \psi - \frac{1}{2} \right] \sin \psi d\psi$ равен нулю. Если теперь, после интегрирования по углу, проводить интегрирование по r , то, несмотря на логарифмическую расходи-

мость интеграла по r , интеграл по всему пространству все равно будет равен нулю.

Вычислим теперь импульс $\Delta P_{x,\psi}$, содержащийся в секторе около угла ψ с углом раскрытия $\Delta\psi$:

$$\Delta P_{x,\psi} = \left[\frac{3}{2} \cos^2 \psi - \frac{1}{2} \right] \sin \psi \Delta\psi \ln(r/R).$$

Полный импульс в секторе $\Delta\psi$ с каким-то определенным углом ψ действительно логарифмически бесконечен. В зависимости от угла ψ импульс в секторе равен либо $+\infty$, либо $-\infty$. «Положительная бесконечность» будет при $0 < \psi < \arccos(1/\sqrt{3})$ и при $\pi - \arccos(1/\sqrt{3}) < \psi < \pi$. «Отрицательная бесконечность» будет при $\arccos(1/\sqrt{3}) < \psi < \pi - \arccos(1/\sqrt{3})$. Угловая граница раздела — угол порядка 55° .

Выводы о распределении импульса в среде, полученные для стационарного движения, переносятся и на движение с ускорением. Поле скорости среды при ускоренном движении сферы имеет такую же пространственную зависимость, как и поле равномерно движущейся сферы. Поэтому, скорость изменения как энергии, так и импульса среды однозначно определяется ускорением сферы в текущий момент времени, причем распределение плотности энергии и плотности импульса по пространству, а также и скорости их изменения определяются текущим значением скорости сферы. Скорость изменения импульса в любой кольцевой области равно нулю, а скорость изменения импульса в секторе равно бесконечности. Это — физическая реальность и физический парадокс. Его можно сформулировать так. Полный импульс среды, содержащийся в любом конечном шаре, концентричном с движущимся шаром, действительно равен нулю. Полный импульс, который сообщается среде при ускоренном движении шара, мгновенно передается на бесконечное расстояние от него и остается там при равномерном движении. Это радикально отличается от распределения кинетической энергии, которая вся сконцентрирована в непосредственной близости от шара.

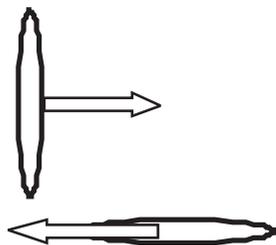


Рис. 3: Колебания тела с изменением формы

Рассмотрим далее эффект возникновения стационарного течения при периодических движениях границы. При движении тела в идеальной несжимаемой среде скорость течения в любой точке среды однозначно определяется скоростью тела и его формой и размерами в данный момент. Чем шире тело в поперечном по отношению направлению, тем больше скорость среды. При осцилляциях тела неизменных размеров и формы смещение частиц среды, происходящее во время движения его в одну сторону, полностью компенсируется во время движения в другую сторону. Если же в процессе осцилляции размеры, или форма меняются, то такой компенсации не будет. Пусть, например, при движении вправо тело «шире», чем при движении влево (рис. 3). Тогда в точках перед телом скорость течения в полупериод движения вправо будет больше, чем в полупериод движения влево. Это означает, что средняя за период скорость течения отлична от нуля, причем возникающий стационарный поток направлен вправо.

Количественно этот механизм можно пояснить на примере акустического течения, возникающего около сферы, которая одновременно пульсирует и осциллирует в идеальной среде [2]. Центр сферы движется по оси $0x$ по закону $x = X(t)$, объем сферы изменяется по закону $v = V(t)$. Поля скорости, вызванные поступательным \mathbf{u}_1 и пульсационным \mathbf{u}_2 движениями, имеют вид:

$$\mathbf{u}_1 = \frac{R^3}{2r^3} [3\mathbf{n}(\dot{\mathbf{X}}\mathbf{n}) - \dot{\mathbf{X}}]; \quad \mathbf{u}_2 = \frac{1}{4\pi} \frac{dV(t)/dt}{r^2} \mathbf{n}.$$

Здесь $\mathbf{X} = X(t)\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$ — радиус-вектор центра сферы, $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ — единичные координатные орты, точка над переменной обозначает дифференцирование по времени, R — радиус сферы, r — расстояние от центра сферы до точки наблюдения, \mathbf{n} — единичный вектор в направлении из центра сферы на точку наблюдения. Пусть $\mathbf{X}(t), V(t)$ — периодические функции. Постоянный поток — акустическое течение — представляет собой усредненное по времени поле скоростей $\langle \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 \rangle$. На большом по сравнению с амплитудой осцилляций расстоянии вычисления дают следующее выражение:

$$\langle \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 \rangle = (1/r_0^3) [3\mathbf{n}_0(\mathbf{n}_0\mathbf{M}) - \mathbf{M}], \quad (5)$$

где

$$\mathbf{M} = 1/(8\pi) \langle V(t)\dot{\mathbf{X}} \rangle, \quad (6)$$

а r_0, \mathbf{n}_0 — средние по времени расстояние и единичный вектор от центра сферы до точки наблюдения. Среднее поле скорости (5) равно полю скорости стационарного диполя с моментом диполя, пропорциональным \mathbf{M} . Этот момент пропорционален среднему значению произведения объема сферы на скорость движения сферы.

Момент \mathbf{M} максимален, если объем $V(t)$ и скорость $\dot{\mathbf{X}}$ находятся в фазе и равен нулю, если эти колебания сдвинуты на $\pi/2$.

Простой, практически важный пример рассмотренных акустических течений — потоки около газового пузырька в звуковом поле. Предполагается, что длина звуковой волны много больше радиуса пузырька, вязкость жидкости не учитывается, поглощение учитывается феноменологически — ведением конечной добротности. Амплитуды колебаний предполагаются малыми, соответственно уравнения движения — линейными. Пусть $p = p_0 \exp[-i(\omega t + \alpha)]$ и $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 \exp(-i\omega t)$ — давление и колебательная скорость в гармоническом звуковом поле. Скорость поступательного колебательного движения пузырька относительно среды равна $\dot{\mathbf{X}} = 2\mathbf{u}$, объем пузырька связан с давлением формулой: $V = -\frac{4\pi R_0}{\rho} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega^2/Q} p$, где R_0 — средний радиус пузырька, ω_0 — резонансная частота пузырька, Q — добротность. Подставляя эти зависимости в (6), получим после усреднения по времени следующее выражение для момента \mathbf{M} :

$$\mathbf{M} = -\frac{R_0 (\omega_0^2 - \omega^2) \cos \alpha + (\omega^2/Q) \sin \alpha}{2\rho (\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\omega^2/Q)^2} p_0 \mathbf{u}_0 \quad (7)$$

Получающееся стационарное течение наглядно можно представлять как поле сферы радиусом R_0 , движущейся с эффективной постоянной скоростью $\mathbf{U} = 2\mathbf{M}/R_0^3$. Формула (7) дает следующее выражение для \mathbf{U} :

$$\mathbf{U} = -\frac{1}{\rho \cdot R_0^2} \frac{(\omega_0^2 - \omega^2) \cos \alpha + (\omega^2/Q) \sin \alpha}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\omega^2/Q)^2} p_0 \mathbf{u}_0. \quad (8)$$

Если акустическое поле является полем плоской бегущей волны, то $\alpha = 0$, $p_0 = \rho c |\mathbf{u}_0|$, c — скорость звука, так что

$$|\mathbf{U}| = \frac{c}{R_0^2} \frac{|\omega_0^2 - \omega^2|}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\omega^2/Q)^2} |\mathbf{u}_0|^2.$$

На резонансной частоте скорость течения равна нулю. На частотах, много выше резонансной частоты $\omega \gg \omega_0$ $|\mathbf{U}| \sim \frac{c}{\omega^2 R_0^2} |\mathbf{u}_0|^2 = \frac{1}{(kR_0)^2} \frac{|\mathbf{u}_0|^2}{c}$

($k = \omega/c$ — волновое число). Учитывая, что волновой размер сферического пузырька kR_0 много меньше единицы, можно заключить, что скорость акустического течения около сферы на высоких частотах существенно превосходит величину $|\mathbf{u}_0|^2/c$. На частотах много ниже резонансной частоты пузырька $\omega \ll \omega_0$ $|\mathbf{U}| \sim \frac{c}{\omega_0^2 R_0^2} |\mathbf{u}_0|^2 = \frac{1}{3} \frac{\beta_0}{\beta} \frac{|\mathbf{u}_0|^2}{c}$, β_0 , β — сжимаемости газа в пузырьке и жидкости. Если в звуковом поле есть стоячие волны, то $\alpha \neq 0$. На резонансной частоте величина $|\mathbf{U}|$ равна $|\mathbf{U}| = \frac{Q}{(kR_0)^2} \frac{|\mathbf{u}_0|^2}{c} \sin \alpha$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Итак, при равномерном движении шара в идеальной среде кинетическая энергия среды имеет вполне определенную величину и находится вблизи шара. В то же время, импульс среды распределен по пространству весьма прихотливо. Количество и знак импульса в данной области зависит от формы области. В конечных областях импульс вообще говоря, отличен от нуля. В области, ограниченной сферой, концентричной шару, импульс равен нулю. Отсюда можно заключить, что полный импульс среды, передаваемый движущимся шаром, расположен «на бесконечности». При этом кинетическая энергия среды локализована около шара.

При периодическом движении тела в идеальной жидкости могут возникать стационарные потоки, если тело одновременно с осцилляцией меняет свою форму. Простая реализация такого движения — газовый пузырек в звуковом поле. Скорость и направление стационарного потока, возникающего около пузырька, зависит от структуры (бегущая, или стоячая звуковая волна) и от частоты звука. В узле и в пучности стоячей волны стационарные потоки около пузырька отсутствуют. Следует подчеркнуть, что рассмотренные потоки устанавливаются практически мгновенно после включения звука, в отличие от потоков, обусловленных вязкостью, время установления которых составляет десятки и сотни периодов звука. Рассмотренный механизм генерации аналогичен эффекту переноса массы поверхностными волнами на воде [3].

[1] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. (М.: Наука, 1986).

[2] М.А. Миронов. Акустический журнал. 22. №3. С. 34. (1976).

[3] Longuet-Higgins M.S. Philos. Trans. R. Soc. London. Ser. A. 245, P. 535. (1953).

Energy, momentum and potential acoustical streaming in ideal medium**M.A. Mironov***Andreyev Acoustic Institute. Shvernik st., 4, Moscow, 117036, Russia**E-mail: mironov@akin.ru*

Two interesting effects in the ideal medium are considered. The first one consists in the following. When body moves in an ideal medium, the medium has energy and momentum, defined through the attached mass and velocity of body. It turns out that the energy of the medium is concentrated around the body, while the momentum is placed at infinity. The second effect is concerned to acoustical streaming. The surface oscillations in an ideal medium can generate acoustical streaming - stationary flows of fluid.

PACS: 47.15.K, 47.15.km, 43.25.Nm

Keywords: attached mass, energy, momentum, acoustical streaming.

Received 09.11.2014.

Сведения об авторе

Миронов Михаил Арсеньевич — канд. физ.-мат. наук, старший научный сотрудник, начальник лаборатории;
тел.: (495) 939-00-00, e-mail: mironov_ma@mail.ru.