Применение метода дифференциальных неравенств для обоснования асимптотики решения системы двух обыкновенных дифференциальных уравнений в виде контрастной структуры типа ступеньки

Н. Т. Левашова,* Е. С. Петровская†
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова,
физический факультет, кафедра математики.
Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2
(Статья поступила 11.12.013; Подписана в печать 26.03.2014)

Построено асимптотическое разложение решения краевой задачи для системы двух обыкновенных дифференциальных уравнений в виде контрастной структуры типа ступеньки. При помощи метода дифференциальных неравенств доказано существование у рассмотренной задачи решения указанного вида, для которого построенное разложение является асимптотическим приближением.

PACS: 02.30. Hq УДК: 519.624.2
Ключевые слова: малый параметр, контрастная структура, асимптотическое разложение, метод диффференциальных неравенств.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В настоящей работе исследуется краевая задача для системы уравнений

$$\begin{aligned} &\varepsilon^4 u'' = f(u,v,x,\varepsilon), \quad \varepsilon^2 v'' = g(u,v,x,\varepsilon), \\ &u'(0) = u'(1) = 0, \quad v'(0) = v'(1) = 0 \end{aligned} \tag{1}$$

В области $(u,v,x,\varepsilon) \in I_u \times I_v \times [0,1] \times (0;\varepsilon_0]$, где I_u, I_v — некоторые промежутки изменения переменных u и v, а f и g — достаточно гладкие функции. Исследуется вопрос о существовании у задачи решения с внутренним переходным слоем и проводится построение асимптотики такого решения.

Пусть выполнены следующие требования:

<u>Условие A1.</u> Уравнение $f(u,v,x,0) = 0$ однозначно разрешимо относительно u: $u = \phi(v,x)$, причем $f_u(\phi(v,x),v,x,0) > 0$, при $(v,x) \in \bar{\Omega} = I_v \times [0;1]$.

<u>Условие A2.</u> Уравнение $h(v,x) := g(\phi(v,x),v,x,0) = 0$ имеет относительно v ровно три корня $v = v^i(x)$, $i = 1,2,3$, такие что $v^i(x) \in I_v$, при $x \in [0;1]$, причем всюду в $\bar{\Omega}$ выполнены неравенства $v^1(x) < v^2(x) < v^3(x)$, $h_v(v^i(x),x) > 0$, $i = 1,3$; $h_v(v^2(x),x) < 0$.

Пусть также при всех $x \in [0;1]$ выполнены неравенства $\int_{v^1(x)}^{v(x)} h(v,x)dv > 0$, если $v \in \left[v^1;v^2\right]$ и $\int_{v^3(x)}^{v(x)} h(v,x)dv > 0$, если $v \in \left[v^2;v^3\right]$.

$$J(x) := \int_{v^1(x)}^{v^3(x)} h(v,x)dv. \tag{2}$$

<u>Условие A3.</u> Пусть существует единственная точка $x_0 \in (0,1)$ — решение уравнения $J(x_0) = 0$, причем $\frac{dJ}{dx}(x_0) < 0$.

<u>Условие A4.</u> (Условие квазимонотонности). Пусть $f_v(u,v,x,0) < 0$, $g_u(u,v,x,0) < 0$ всюду в области $(u,v,x) \in I_u \times I_v \times [0;1]$.

Ранее в [1] была рассмотрена система уравнений вида (1) для эллиптического оператора в двумерной области, описан алгоритм построения асимптотики в виде контрастной структуры типа ступеньки (КСТС) и проведено обоснование с использованием принципа сжимающих отображений. КСТС характеризуется быстрым переходом решения из окрестности одного корня вырожденной системы в окрестность другого корня. Переход осуществляется в окрестности некоторой внутренней точки отрезка $[0,1]$, которую мы обозначим x^*. В настоящей работе предложен измененный алгоритм построения асимптотики и проведено обоснование при помощи метода дифференциальных неравенств.

Считаем, что точка перехода x^* — это та точка, для которой выполнено равенство

$$v(x^*,\varepsilon) = v^2(x^*) \tag{3}$$

и будем искать её в виде суммы

$$x^* = x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \dots \ . \tag{4}$$

Коэффициент x_0 разложения (4) — точка определенная в условии А3, а остальные члены ряда будут найдены в процессе построения асимптотики решения задачи (1).

2. ПОСТРОЕНИЕ ФОРМАЛЬНОЙ АСИМПТОТИКИ РЕШЕНИЯ В ВИДЕ КСТС

A. Вид асимптотики

Асимптотика решения задачи (1) строится отдельно слева и справа от точки перехода x^*.

$$U = \begin{cases} u^{(-)}, & x \in [0,x^*], \\ u^{(+)}, & x \in [x^*,1], \end{cases} \quad V = \begin{cases} v^{(-)}, & x \in [0,x^*], \\ v^{(+)}, & x \in [x^*,1]. \end{cases}$$

*E-mail: natasha@npanalytica.ru
†E-mail: petrovskayaev17@mail.ru

Функции $u^{(-)}$, $u^{(+)}$, $v^{(-)}$, $v^{(+)}$ имеют вид:

$$\begin{aligned}
u^{(-)} &= \bar{u}^{(-)}\left(x,\varepsilon\right) + Q^{(-)}u\left(\tau,\varepsilon\right) + Pu^{(-)}\left(\varsigma_1,\varepsilon\right) + Ru^{(-)}\left(\xi_1,\varepsilon\right),\\
u^{(+)} &= \bar{u}^{(+)}\left(x,\varepsilon\right) + Q^{(+)}u\left(\tau,\varepsilon\right) + Pu^{(+)}\left(\varsigma_2,\varepsilon\right) + Ru^{(+)}\left(\xi_2,\varepsilon\right),\\
v^{(-)} &= \bar{v}^{(-)}\left(x,\varepsilon\right) + Q^{(-)}v\left(\tau,\varepsilon\right) + Pv^{(-)}\left(\varsigma_1,\varepsilon\right) + Rv^{(-)}\left(\xi_1,\varepsilon\right),\\
v^{(+)} &= \bar{v}^{(+)}\left(x,\varepsilon\right) + Q^{(+)}v\left(\tau,\varepsilon\right) + Pv^{(+)}\left(\varsigma_2,\varepsilon\right) + Rv^{(+)}\left(\xi_2,\varepsilon\right).
\end{aligned} \tag{5}$$

Здесь $\bar{u}^{(\mp)}(x,\varepsilon)$, $\bar{v}^{(\mp)}(x,\varepsilon)$ — регулярные члены асимптотики; $Q^{(\mp)}u(\tau,\varepsilon)$, $Q^{(\mp)}v(\tau,\varepsilon)$ — функции переходного слоя в окрестности точки x^*; $\tau = \dfrac{x-x^*}{\varepsilon}$ — растянутая переменная в окрестности переходного слоя; $\tau \le 0$ для функций с индексом «минус», $\tau \ge 0$ для функций с индексом «плюс» $Pu^{(\mp)}\left(\varsigma_i,\varepsilon\right)$, $Pv^{(\mp)}\left(\varsigma_i,\varepsilon\right)$, $Ru^{(\mp)}\left(\xi_i,\varepsilon\right)$, $Rv^{(\mp)}\left(\xi_i,\varepsilon\right)$, $i=1,2$ — функции пограничных слоев в окрестностях граничных точек $x=0$ и $x=1$; $\varsigma_1 = \dfrac{x}{\varepsilon}$, $\xi_1 = \dfrac{x}{\varepsilon^2}$, $\varsigma_2 = \dfrac{1-x}{\varepsilon}$, $\xi_2 = \dfrac{1-x}{\varepsilon^2}$ — погранслойные переменные.

Каждое слагаемое в (5) будем искать в виде ряда по степенямε, например,

$$\bar{u}^{(-)}(x,\varepsilon) = \bar{u}_0^{(-)}(x) + \varepsilon\bar{u}_1^{(-)}(x) + \ldots + \varepsilon^n\bar{u}_n^{(-)}(x) + \ldots$$

При этом асимптотические разложения $u^{(-)}$и $u^{(+)}$; $v^{(-)}$ и $v^{(+)}$ гладко сшиваются в точке x^*.

Условия непрерывности асимптотического разложения v — компоненты решения в этой точке получаются из (3):

$$\begin{aligned}
\bar{v}^{(-)}(x^*,\varepsilon) + Q^{(-)}v(0,\varepsilon) &= v^2\left(x^*\right),\\
\bar{v}^{(+)}(x^*,\varepsilon) + Q^{(+)}v(0,\varepsilon) &= v^2\left(x^*\right).
\end{aligned} \tag{6}$$

Далее будет показано, что выполнение условия (6) обеспечивает непрерывность асимптотического разложения u — компоненты решения в каждом порядке по степеням ε, то есть, выполнение равенства

$$\bar{u}^{(-)}(x^*,\varepsilon)+Q^{(-)}u(0,\varepsilon) = \bar{u}^{(+)}(x^*,\varepsilon)+Q^{(+)}u(0,\varepsilon). \tag{7}$$

Запишем условия непрерывности производных асимптотических разложений в точке x^*:

$$\begin{aligned}
\left.\frac{d\bar{v}^{(-)}}{dx}\right|_{x^*} + \frac{1}{\varepsilon}\left.\frac{dQ^{(-)}v}{d\tau}\right|_{\tau=0} &= \left.\frac{d\bar{v}^{(+)}}{dx}\right|_{x^*} + \frac{1}{\varepsilon}\left.\frac{dQ^{(+)}v}{d\tau}\right|_{\tau=0}\\
\left.\frac{d\bar{u}^{(-)}}{dx}\right|_{x^*} + \frac{1}{\varepsilon}\left.\frac{dQ^{(-)}u}{d\tau}\right|_{\tau=0} &= \left.\frac{d\bar{u}^{(+)}}{dx}\right|_{x^*} + \frac{1}{\varepsilon}\left.\frac{dQ^{(+)}u}{d\tau}\right|_{\tau=0}
\end{aligned} \tag{8}$$

В левые части равенств (6) и в равенства (7) и (8) не входят функции пограничных слоев, поскольку в результате стандартной процедуры умножения на срезающую функцию [2] они будут равны нулю вне малых окрестностей граничных точек $x=0$ и $x=1$, в частности равны нулю в окрестности точки x^*.

B. Регулярная часть асимптотики

Подставляя разложения

$$\begin{aligned}
\bar{u}^{(\mp)}(x,\varepsilon) &= \bar{u}_0^{(\mp)}(x) + \varepsilon\bar{u}_1^{(\mp)}(x) + \ldots + \varepsilon^n\bar{u}_n^{(\mp)}(x) + \ldots\\
\bar{v}^{(\mp)}(x,\varepsilon) &= \bar{v}_0^{(\mp)}(x) + \varepsilon\bar{v}_1^{(\mp)}(x) + \ldots + \varepsilon^n\bar{v}_n^{(\mp)}(x) + \ldots.
\end{aligned}$$

в систему уравнений

$$\begin{aligned}
\varepsilon^4\frac{d^2}{dx^2}\bar{u}(x,\varepsilon) &= f(\bar{u}(x,\varepsilon),\bar{v}(x,\varepsilon),x,\varepsilon),\\
\varepsilon^2\frac{d^2}{dx^2}\bar{v}(x,\varepsilon) &= g(\bar{u}(x,\varepsilon),\bar{v}(x,\varepsilon),x,\varepsilon), \quad x\in[0,1]
\end{aligned}$$

стандартным способом, описанным в [2], получаем систему конечных уравнений для определения функций $\bar{u}_k^{(\mp)}(x)$, $\bar{v}_k^{(\mp)}(x)$, $k=0,1\ldots$

Главные члены $\bar{u}_0^{(\mp)}(x)$, $\bar{v}_0^{(\mp)}(x)$ суть решения вырожденной системы (1):

$$\begin{aligned}
f(\bar{u}_0^{(\mp)}(x),\bar{v}_0^{(\mp)}(x),x,0) &= 0,\\
g(\bar{u}_0^{(\mp)}(x),\bar{v}_0^{(\mp)}(x),x,0) &= 0.
\end{aligned}$$

Они определяются условиями (A1) и (A2):

$$\bar{v}_0^{(-)} = v^1(x), \qquad \bar{v}_0^{(+)} = v^3(x), \tag{A1}$$

$$\begin{aligned} \bar{u}_0^{(-)} &= \phi(v^1(x), x) =: \bar{\phi}^1(x), \\ \bar{u}_0^{(+)} &= \phi(v^3(x), x) =: \bar{\phi}^3(x). \end{aligned} \tag{A2}$$

Обозначим

$$\bar{f}_u^{(-)}(x) = f_u(\bar{\phi}^1(x), v^1(x), x),$$

$$\bar{f}_u^{(+)}(x) = f_u(\bar{\phi}^3(x), v^3(x), x);$$

аналогичный смысл имеют обозначения $\bar{f}_v^{(\mp)}(x)$, $\bar{g}_u^{(\mp)}(x)$, $\bar{g}_v^{(\mp)}(x)$.

Функции $\bar{u}_k^{(\mp)}$ и $\bar{v}_k^{(\mp)}$ при $k \geq 1$ определяются из линейных систем

$$\begin{aligned} \bar{f}_u^{(\mp)}(x)\bar{u}_k^{(\mp)} + \bar{f}_v^{(\mp)}(x)\bar{v}_k^{(\mp)} &= \bar{F}_k^{(\mp)}(x), \\ \bar{g}_u^{(\mp)}(x)\bar{u}_k^{(\mp)} + \bar{g}_v^{(\mp)}(x)\bar{v}_k^{(\mp)} &= \bar{G}_k^{(\mp)}(x). \end{aligned} \tag{9}$$

Здесь $\bar{F}_k^{(\mp)}(x)$ и $\bar{G}_k^{(\mp)}(x)$ — известные на k-ом шаге функции, реккурентно выражающиеся через $\bar{u}_i^{(\mp)}(x)$ и $\bar{v}_i^{(\mp)}(x)$ с номерами $i < k$, в частности, $\bar{F}_1^{(\mp)}(x) = -\bar{f}_\varepsilon^{(\mp)}(x)$, $\bar{G}_1^{(\mp)}(x) = -\bar{g}_\varepsilon^{(\mp)}(x)$.

Определители

$$\Delta^{(\mp)}(x) = \bar{f}_u^{(\mp)}(x)\,\bar{g}_v^{(\mp)}(x) - \bar{f}_v^{(\mp)}(x)\,\bar{g}_u^{(\mp)}(x)$$

систем (9) отличны от нуля всюду на отрезке $[0;1]$. В самом деле, из условия A1 следует, что

$$\bar{\phi}_v^{1,3}(x) = \left(\bar{f}_u^{(\mp)}(x)\right)^{-1} \bar{f}_v^{(\mp)}(x). \tag{10}$$

Используя это равенство, получаем

$$\Delta^{(\mp)}(x) = \bar{f}_u^{(\mp)}(x)\left(\bar{g}_v^{(\mp)}(x) - \bar{\phi}_v^{1,3}(x)\,\bar{g}_u^{(\mp)}(x)\right) = \\ = \bar{f}_u^{(\mp)}(x)\,h_v\left(v^i(x), x\right),$$

где функции $h\left(v^i(x), x\right)$ определены в условии A2 (верхний индекс «минус» берется для $i = 1$, «плюс» — для $i = 3$). Используя условия A1 и A2, получаем неравенства

$$\begin{gathered} \Delta^{(-)}(x) = \bar{f}_u^{(-)}(x)\,h_v\left(v^1(x), x\right) > 0, \\ \Delta^{(+)}(x) = \bar{f}_u^{(+)}(x)\,h_v\left(v^3(x), x\right) > 0; \\ 0 \leq x \leq 1. \end{gathered} \tag{11}$$

Из неравенств (11) следует однозначная разрешимость систем (9) относительно $\bar{u}_k^{(\mp)}(x)$, $\bar{v}_k^{(\mp)}(x)$ при $k \geq 1$.

C. Функции переходного слоя.

Функции переходного слоя $Q^{(\mp)}u(\tau,\varepsilon)$, $Q^{(\mp)}v(\tau,\varepsilon)$ будем искать в виде рядов по степеням ε:

$$Q^{(\mp)}u(\tau,\varepsilon) = Q_0^{(\mp)}u(\tau) + \varepsilon Q_1^{(\mp)}u(\tau) + \ldots;$$
$$Q^{(\mp)}v(\tau,\varepsilon) = Q_0^{(\mp)}v(\tau) + \varepsilon Q_1^{(\mp)}v(\tau) + \ldots$$

Уравнения для функций $Q_i^{(\mp)}u(\tau)$, $Q_i^{(\mp)}v(\tau)$, $i = 0, 1, \ldots$ получаются стандартным способом, (см. [2]), путем приравнивая коэффициентов при ε^i в обеих частях равенств

$$\varepsilon^2 \frac{d^2 Q^{(\mp)}u}{d\tau^2} = Q^{(\mp)}f; \qquad \frac{d^2 Q^{(\mp)}v}{d\tau^2} = Q^{(\mp)}g, \tag{12}$$

где

$$Q^{(\mp)}f = f\left(\bar{u}^{(\mp)}(\varepsilon\tau + x^*, \varepsilon) + Q^{(\mp)}u(\tau,\varepsilon), \bar{v}^{(\mp)}(\varepsilon\tau + x^*, \varepsilon) + Q^{(\mp)}v(\tau,\varepsilon), \varepsilon\tau + x^*, \varepsilon\right) - \\ - f\left(\bar{u}^{(\mp)}(\varepsilon\tau + x^*, \varepsilon), \bar{v}^{(\mp)}(\varepsilon\tau + x^*, \varepsilon), \varepsilon\tau + x^*, \varepsilon\right)$$

и аналогичный смысл имеет обозначение $Q^{(\mp)}g$.

Потребуем, чтобы функции переходного слоя удовлетворяли условию равенства нулю на бесконечности:

$$Q_i^{(\mp)}u(\tau) \to 0, \;\; Q_i^{(\mp)}v(\tau) \to 0 \quad \text{при} \tau \to \mp\infty. \tag{13}$$

Отметим, что функции переходного слоя зависят от точки перехода x^* как от параметра, причем в уравнениях для этих функций будем использовать эту точку целиком без учета разложения (4).

1. *Функции переходного слоя нулевого порядка*

Приравнивая коэффициенты при ε^0 в обеих частях равенств (12), при $\tau \leq 0$ получаем систему уравнений для функций $Q_0^{(-)}u(\tau)$ и $Q_0^{(-)}v(\tau)$, а при $\tau \geq 0$ — для функций $Q_0^{(+)}u(\tau)$ и $Q_0^{(+)}v(\tau)$:

$$f\left(\bar{\phi}^{1,3}\left(x^*\right)+Q_0^{(\mp)}u\left(\tau\right),v^{1,3}\left(x^*\right)+Q_0^{(\mp)}v\left(\tau\right),x^*,0\right)=0, \tag{14}$$

$$\frac{d^2Q_0^{(\mp)}v}{d\tau^2}=g\left(\bar{\phi}^{1,3}\left(x^*\right)+Q_0^{(\mp)}u\left(\tau\right),v^{1,3}\left(x^*\right)+Q_0^{(\mp)}v\left(\tau\right),x^*,0\right). \tag{15}$$

Верхний индекс «единица» берётся при $\tau\le 0$, индекс «три» — при $\tau\ge 0$.

Введем обозначение

$$\tilde{v}\left(\tau,x^*\right):=\begin{cases} v^1\left(x^*\right)+Q_0^{(-)}v\left(\tau\right), & \tau\le 0;\\ v^3\left(x^*\right)+Q_0^{(+)}v\left(\tau\right), & \tau\ge 0.\end{cases} \tag{16}$$

Из (6) в нулевом порядке разложения по степеням ε следует, что при $\tau=0$

$$\tilde{v}\left(0,x^*\right)=v^2\left(x^*\right), \tag{17}$$

поэтому функция $\tilde{v}\left(\tau,x^*\right)$ непрерывна.

Из уравнений (14) в силу условия A1, следует:

$$\begin{aligned} &\bar{\phi}^1\left(x^*\right)+Q_0^{(-)}u\left(\tau\right)=\\ &\qquad=\phi\left(v^1\left(x^*\right)+Q_0^{(-)}v\left(\tau\right),x^*\right)=:\phi\left(\tilde{v},x^*\right);\\ &\bar{\phi}^3\left(x^*\right)+Q_0^{(+)}u\left(\tau\right)=\\ &\qquad=\phi\left(v^3\left(x^*\right)+Q_0^{(+)}v\left(\tau\right),x^*\right)=:\phi\left(\tilde{v},x^*\right).\end{aligned} \tag{18}$$

Подставляя выражения (18) в уравнения (15), получаем уравнение для определения функции $\tilde{v}$:

$$\frac{d^2\tilde{v}}{d\tau^2}=h\left(\tilde{v},x^*\right) \tag{19}$$

где $h\left(v,x\right)$ — функция, определенная в условии A2.

Учитывая (13), добавим условия на бесконечности:

$$\begin{aligned}&\tilde{v}\left(\tau,x^*\right)\to v^1\left(x^*\right) \quad \text{при} \quad \tau\to-\infty,\\ &\tilde{v}\left(\tau,x^*\right)\to v^3\left(x^*\right) \quad \text{при} \quad \tau\to+\infty.\end{aligned} \tag{20}$$

Будем решать уравнение (19) с условиями (17) и (20) при $\tau\le 0$ и $\tau\ge 0$. Применим стандартный способ понижения порядка дифференциального уравнения, в результате чего от уравнений (19) с условиями (20) приходим к уравнениям

$$\begin{aligned}&\frac{d\tilde{v}}{d\tau}=\left[2\int_{v^1(x^*)}^{\tilde{v}}h\left(v,x^*\right)dv\right]^{\frac{1}{2}}, \quad \tau\le 0;\\ &\frac{d\tilde{v}}{d\tau}=\left[2\int_{v^3(x^*)}^{\tilde{v}}h\left(v,x^*\right)dv\right]^{\frac{1}{2}}, \quad \tau\ \ge 0.\end{aligned} \tag{21}$$

При выборе знака в правых частях уравнений мы учли, что $v^1\left(x^*\right)<v^2\left(x^*\right)<v^3\left(x^*\right)$ и следовательно функция $\tilde{v}\left(\tau,x^*\right)$ должна возрастать при $\tau\in(-\infty;+\infty)$. Интегрируя эти каждое из этих уравнений с начальным условием (17), находим $\tilde{v}\left(\tau,x^*\right)$ при $\tau\le 0$ и $\tau\ge 0$.

Функции $Q_0^{(\mp)}u\left(\tau\right)$ находим из равенств (18). Из (18) и (17) следует непрерывность u-компоненты асимптотики решения в нулевом порядке (см. (7)).

Для функций $Q_0^{(\mp)}u\left(\tau\right)$ и $Q_0^{(\mp)}v\left(\tau\right)$ имеют место экспоненциальные оценки [3]:

$$\begin{aligned}&\left|Q_0^{(\pm)}u\left(\tau\right)\right|\le C\exp\left(-\kappa\left|\tau\right|\right);\\ &\left|Q_0^{(\pm)}v\left(\tau\right)\right|\le C\exp\left(-\kappa\left|\tau\right|\right),\end{aligned} \tag{22}$$

где C и κ — здесь и далее подходящие положительные числа, не зависящие от ε.

Запишем условия гладкого сшивания (8) для v-компоненты асимптотики решения в порядке ε^{-1} с учетом представления (4) для точки перехода и используя обозначения (16):

$$\left.\frac{d\tilde{v}}{d\tau}\right|_{\tau=-0,x^*=x_0}=\left.\frac{d\tilde{v}}{d\tau}\right|_{\tau=+0,x^*=x_0}. \tag{23}$$

Подставляя сюда выражения (21), получаем

$$\left[2\int_{v^1(x_0)}^{v^2(x_0)}h\left(v,x_0\right)dv\right]^{\frac{1}{2}}=\left[2\int_{v^3(x_0)}^{v^2(x_0)}h\left(v,x_0\right)dv\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Из последнего равенства нетрудно получить уравнение относительно коэффициента x_0:

$$J\left(x_0\right)=0,$$

где функция $J\left(x\right)$ определена формулой (2). Это уравнение имеет единственное решение на отрезке $(0;1)$ в силу условия A3.

Покажем, что выполнение условия гладкого сшивания нулевого приближения v-компоненты асимптотики обеспечивает гладкое сшивание нулевого приближения u-компоненты. Приравнивая коэффициенты при ε^{-1}во втором равенстве (8), получаем равенство

$$\left.\frac{dQ_0^{(-)}u}{d\tau}\right|_{\tau=-0}=\left.\frac{dQ_0^{(+)}u}{d\tau}\right|_{\tau=+0}.$$

Перепишем это равенство с учетом выражения (18) и представления (4) следующим образом:

$$\left.\frac{dQ_0^{(-)}u}{d\tau}\right|_{\tau=-0} - \left.\frac{dQ_0^{(+)}u}{d\tau}\right|_{\tau=+0} = \phi_v\left(\tilde{v},x_0\right)\left(\left.\frac{dQ_0^{(-)}v}{d\tau}\right|_{\tau=-0} - \left.\frac{dQ_0^{(+)}v}{d\tau}\right|_{\tau=+0}\right) = 0. \tag{24}$$

Последнее равенство выполняется, если x_0 — точка из условия A3.

2. Функции переходного слоя первого порядка

Для сокращения дальнейших записей введем обозначение $f_u\left(\tau\right) = f_u\left(\phi\left(\tilde{v},x^*\right),\tilde{v}\left(\tau,x^*\right),x^*,0\right)$, аналогичный смысл имеют обозначения $f_v\left(\tau\right),\ f_x\left(\tau\right),f_\varepsilon\left(\tau\right),g_u\left(\tau\right),\ g_v\left(\tau\right),g_x\left(\tau\right),\ g_\varepsilon\left(\tau\right)$.

Из первых уравнений (12), сравнивая коэффициенты при ε, получаем

$$\bar{u}_1^{(\mp)}\left(x^*\right) + Q_1^{(\mp)}u = \phi_v\left(\tilde{v},x^*\right)\left(\bar{v}_1^{(\mp)}\left(x^*\right) + Q_1^{(\mp)}v\right) + q_1^{(\mp)}f\left(\tau,x^*\right), \tag{25}$$

где

$$q_1^{(\mp)}f\left(\tau,x^*\right) = -\left(f_u\left(\tau\right)\right)^{-1}\cdot f_\varepsilon\left(\tau\right) + \left(\phi_v\left(\tilde{v},x^*\right) - \bar{\phi}_v^{1,3}\left(x^*\right)\right)v_x^{1,3}\left(x^*\right)\tau + \left(\phi_x\left(\tilde{v},x^*\right) - \bar{\phi}_x^{1,3}\left(x^*\right)\right)\tau \tag{26}$$

и использованы равенства

$$\phi_v\left(\tilde{v},x^*\right) = -f_v\left(\tau\right)/f_u\left(\tau\right), \qquad \phi_x\left(\tilde{v},x^*\right) = -f_x\left(\tau\right)/f_u\left(\tau\right),$$

а также (10).

Из вторых уравнений (12) получаем уравнения

$$\frac{d^2Q_1^{(\mp)}v}{d\tau^2} = g_u\left(\tau\right)\left(\bar{u}_1^{(\mp)}\left(x^*\right) + Q_1^{(\mp)}u\right) + g_v\left(\tau\right)\left(\bar{v}_1^{(\mp)}\left(x^*\right) + Q_1^{(\mp)}v\right) + G_1^{(\mp)}\left(\tau,x^*\right), \tag{27}$$

где

$$G_1^{(\mp)}\left(\tau,x^*\right) = \left(g_u\left(\tau\right) - \bar{g}_u^{(\mp)}\left(x^*\right)\right)\left(\bar{\phi}_v^{1,3}\left(x^*\right)v_x^{1,3}\left(x^*\right) + \bar{\phi}_x^{1,3}\left(x^*\right)\right)\tau +$$
$$+\left(\left(g_v\left(\tau\right) - \bar{g}_v^{(\mp)}\left(x^*\right)\right)v_x^{1,3}\left(x^*\right) + g_x\left(\tau\right) - \bar{g}_x^{(\mp)}\left(x^*\right)\right)\tau + g_\varepsilon\left(\tau\right).$$

Подставляя (25) в (27), перепишем уравнения для функций $Q_1^{(\mp)}v$ следующим образом

$$\frac{d^2Q_1^{(\mp)}v}{d\tau^2} = h_v\left(\tau\right)\left(\bar{v}_1^{(\mp)}\left(x^*\right) + Q_1^{(\mp)}v\right) + H_1^{(\mp)}\left(\tau,x^*\right), \tag{28}$$

где

$$H_1^{(\mp)}\left(\tau,x^*\right) = \left(\left(h_v\left(\tau\right) - h_v\left(v^{1,3},x^*\right)\right)v_x^{1,3}\left(x^*\right) + h_x\left(\tau\right) - h_x\left(v^{1,3},x^*\right)\right)\tau -$$
$$-g_u\left(\tau\right)\cdot\left(f_u\left(\tau\right)\right)^{-1}\cdot f_\varepsilon\left(\tau\right) + g_\varepsilon\left(\tau\right).$$

и введены обозначения $h_v\left(\tau\right) = h_v\left(\tilde{v}\left(\tau,x^*\right),x^*\right);\quad h_x\left(\tau\right) = h_x\left(\tilde{v}\left(\tau,x^*\right),x^*\right).$

Граничные условия для $Q_1^{(\mp)}v\left(\tau\right)$ следуют из (6) с учетом (17) и (13):

$$\bar{v}_1^{(\mp)}\left(x^*\right) + Q_1^{(\mp)}v\left(0\right) = 0; Q_1^{(\mp)}v\left(\mp\infty\right) = 0. \tag{29}$$

Решение уравнения (28) с этими граничными условиями находится в явном виде:

$$Q_1^{(\mp)}v = -\bar{v}_1^{(\mp)}(x^*)\frac{\Phi_{1,3}(\tau)}{\Phi(0)} + \Phi_{1,3}(\tau)\int_0^\tau \Phi_{1,3}^{-2}(\tau_1)d\tau_1\int_{\mp\infty}^{\tau_1}\Phi_{1,3}(\tau_2)\left(H_1^{(\mp)}(\tau_2,x^*) + h_v\left(\tau_2\right)\bar{v}_1^{(\mp)}\left(x^*\right)\right)d\tau_2. \tag{30}$$

Здесь для краткости введены обозначения:

$$\Phi_{1,3}(\tau)=\frac{\partial\tilde{v}}{\partial\tau}=\left[2\int_{v^{1,3}(x^*)}^{\tilde{v}(\tau)}h(v,x^*)dv\right]^{\frac{1}{2}},$$

$$\Phi(0)=\left[2\int_{v^1(x^*)}^{v^2(x^*)}h(v,x^*)dv\right]^{\frac{1}{2}}=\left[2\int_{v^3(x^*)}^{v^2(x^*)}h(v,x^*)dv\right]^{\frac{1}{2}}. \qquad (31)$$

Подставляя выражения (30) для $Q_1^{(\mp)}v\,(\tau)$ в (25), находим функции $Q_1^{(\mp)}u\,(\tau)$. Функции $Q_1^{(\mp)}v\,(\tau)$ и $Q_1^{(\mp)}u\,(\tau)$ имеют экспоненциальные оценки типа (22).

Положив $\tau=0$ в выражениях (25) и (26), и учитывая и первые равенства (29), получим равенства $\bar{u}_1^{(\mp)}(x^*)+Q_1^{(\mp)}u\,(0)=-\left(f_u\,(0)\right)^{-1}\cdot f_\varepsilon\,(0)$, из которых следует непрерывность u–компоненты асимптотического разложения первого порядка.

В условии сшивания (8) для v-компоненты решения выделим слагаемые нулевого порядка по ε с учетом разложения x^* в ряд (4) и приравняем их нулю:

$$\frac{d}{dx^*}\left(\left.\frac{d\tilde{v}}{d\tau}\right|_{\substack{\tau=0-0,\\ x^*=x_0}}-\left.\frac{d\tilde{v}}{d\tau}\right|_{\substack{\tau=0+0,\\ x^*=x_0}}\right)x_1=$$

$$=\left.\frac{dv^3}{dx}\right|_{x_0}-\left.\frac{dv^1}{dx}\right|_{x_0}+\left.\left(\frac{dQ_1^{(+)}v}{d\tau}-\frac{dQ_1^{(-)}v}{d\tau}\right)\right|_{\tau=0}$$

Подставляя сюда выражения для производных функций $Q_1^{(\mp)}v\,(\tau)$, полученные из (30), а также выражения (21) и используя обозначение (2), запишем уравнение для определения коэффициента x_1 ряда (4) в виде

$$\left.\frac{d}{dx}J\,(x)\right|_{x=x_0}x_1=S_1\,(x_0)\,, \qquad (32)$$

где

$$S_1=\left.\frac{dv^3}{dx}\right|_{x_0}-\left.\frac{dv^1}{dx}\right|_{x_0}+\frac{1}{\Phi\,(0)}\int_{+\infty}^{0}\Phi_3\,(\tau)\,H_1^{(+)}\,(\tau,x_0)\,d\tau-$$

$$-\frac{1}{\Phi\,(0)}\int_{-\infty}^{0}\Phi_1\,(\tau)\,H_1^{(-)}\,(\tau,x_0)\,d\tau.$$

3. *Функции переходного слоя произвольного порядка*

Аналогично первому приближению можно определить функции переходного слоя для любого $k=2,3,\ldots$, считая, что они определены уже для номеров $i=0,1,\ldots,k-1$ и имеют экспоненциальные оценки.

Из первого уравнения (12), сравнивая коэффициенты при ε^k, получаем соотношения, связывающие функции $Q_k^{(\mp)}u\,(\tau)$ и $Q_k^{(\mp)}v\,(\tau)$:

$$\bar{u}_k^{(\mp)}\,(x^*)+Q_k^{(\mp)}u=$$

$$=\phi_v\,(\tilde{v},x^*)\left(\bar{v}_k^{(\mp)}\,(x^*)+Q_k^{(\mp)}v\right)+q_k^{(\mp)}f\,(\tau,x^*)\,, \qquad (33)$$

где $q_k^{(\mp)}f\,(\tau,x^*)$ — известные на k-ом шаге функции. Используя это равенство, приходим к задачам для $Q_k^{(\mp)}v\,(\tau)$, аналогичным задаче (28), (29) для $Q_1^{(\mp)}v\,(\tau)$:

$$\frac{d^2Q_k^{(\mp)}v}{d\tau^2}=h_v\,(\tau)\,Q_k^{(\mp)}v+H_k^{(\mp)}\,(\tau,x^*)\,,$$

$$\bar{v}_k^{(\mp)}\,(x^*)+Q_k^{(\mp)}v\,(0)=0,\qquad Q_k^{(\mp)}v\,(\mp\infty)=0,$$

где $H_k^{(\mp)}\,(\tau,x^*)$ — известные на k-ом шаге функции. Функции $Q_k^{(\mp)}v\,(\tau)$ находятся в явном виде:

$$Q_k^{(\mp)}v\,(\tau)=-\bar{v}_k^{(\mp)}\,(x^*)\,\Phi_{1,3}\,(\tau)\,\Phi_{1,3}^{-1}\,(0)+\Phi_{1,3}\,(\tau)\times$$

$$\times\int_0^{\tau}\Phi_{1,3}^{-2}\,(\tau_1)\,d\tau_1\int_{\mp\infty}^{\tau_1}\Phi_{1,3}\,(\tau_2)\,H_k^{(\mp)}\,(\tau_2,x^*)\,d\tau_2.$$

Подставляя эти выражения для $Q_k^{(\mp)}v\,(\tau)$ в (33), находим функции $Q_k^{(\mp)}u\,(\tau)$. Отметим, что для функций $Q_k^{(\mp)}u\,(\tau)$, $Q_k^{(\mp)}v\,(\tau)$, $k=1,2,\ldots$ имеют место экспоненциальные оценки типа (22). Выделяя в условии сшивания (8) для v-компоненты решения слагаемые порядка ε^{k-1} с учетом разложения x^* в ряд (4) и приравнивая их нулю, получаем уравнение для определения коэффициента x_k:

$$\left.\frac{d}{dx}J\,(x)\right|_{x=x_0}x_k=S_k, \qquad (34)$$

где S_k — известные величины.

Гладкость u-компоненты асимптотического разложения k-го порядка показана в [1].

Будем считать, что все функции переходного слоя умножены стандартным способом [4] на срезающую функцию, в результате чего функции переходного слоя не изменяются в конечной окрестности точки x_0 и становятся равными нулю вне этой окрестности. Это не влияет на характер асимптотики, поскольку вне указанной окрестности функции переходного слоя являются величинами более высокого порядка малости, чем любая положительная степень ε. В результате этой процедуры функции переходного слоя не будут вносить никакой невязки в граничные условия.

D. Функции пограничных слоев

Для построения функций пограничных слоев вводятся растянутые переменные: $\varsigma_1 = \dfrac{x}{\varepsilon}$, $\xi_1 = \dfrac{x}{\varepsilon^2}$ — в окрестности точки $x = 0$, и $\varsigma_2 = \dfrac{1-x}{\varepsilon}$, $\xi_2 = \dfrac{1-x}{\varepsilon^2}$ — в окрестности точки $x = 1$. Пограничные слои в окрестностях этих точек описываются соответственно функциями $Pu^{(-)}(\varsigma_1)$, $Pv^{(-)}(\varsigma_1)$, $Ru^{(-)}(\xi_1)$, $Rv^{(-)}(\xi_1)$ и $Pu^{(+)}(\varsigma_2)$, $Pv^{(+)}(\varsigma_2)$, $Ru^{(+)}(\xi_2)$, $Rv^{(+)}(\xi_2)$.

Пограничные функции строятся стандартным способом [2]. Ряды для пограничных функций не содержат членов нулевого порядка, что характерно для задачи Неймана, ряды $Pu^{(\mp)}(\varsigma_{1,2})$, $Pv^{(\mp)}(\varsigma_{1,2})$ начинаются с членов порядка ε, ряды $Ru^{(\mp)}(\xi_{1,2})$ — с членов порядка ε^2, а ряды $R^{(\mp)}v\left(\xi_{1,2}\right)$ — с членов порядка ε^4. Функции $P_i u^{(\mp)}(\varsigma_{1,2})$, $P_i v^{(\mp)}(\varsigma_{1,2})$ экспоненциально убывают при $\varsigma_{1,2} \to +\infty$, а функции $R_i u^{(\mp)}(\xi_{1,2})$ $R_i v^{(\mp)}(\xi_{1,2})$ экспоненциально убывают при $\xi_{1,2} \to +\infty$. Аналогично функциям переходного слоя умножим все пограничные функции на срезающие функции, в результате чего пограничные функции станут равными нулю вне некоторых конечных окрестностей граничных точек и, таким образом, не войдут в условия сшивания (6), (8).

E. Формальная асимптотика (n+1)-ого порядка

Определим члены рядов (5) и (4) до номера $n+1$ включительно, а также функции $R^{(\mp)}_{n+2}v$ и $R^{(\mp)}_{n+3}v$ и положим $X_{n+1} = \sum_{i=0}^{n+1}\varepsilon^i x_i$, $\tau_{n+1} = \dfrac{x - X_{n+1}}{\varepsilon}$. Точка X_{n+1} разделяет отрезок $[0;1]$ на части $[0;X_{n+1}]$ и $[X_{n+1};1]$.

Составим суммы

$$
\begin{aligned}
&U^{(-)}_{n+1} = \sum_{i=0}^{n+1}\varepsilon^i\left(\bar{u}^{(-)}_i(x) + Q^{(-)}_i u\left(\tau_n\right) + P^{(-)}_i u(\varsigma_1) + R^{(-)}_i u(\xi_1)\right), \ \ x\in[0;X_{n+1}],\\
&U^{(+)}_{n+1} = \sum_{i=0}^{n+1}\varepsilon^i\left(\bar{u}^{(+)}_i(x) + Q^{(+)}_i u\left(\tau_n\right) + P^{(+)}_i u(\varsigma_2) + R^{(+)}_i u(\xi_2)\right), \ \ x\in[X_{n+1};1],\\
&V^{(-)}_{n+1}\left(x,\varepsilon\right) = \sum_{i=0}^{n+1}\varepsilon^i\left(\bar{v}^{(-)}_i\left(x\right) + Q^{(-)}_i v\left(\tau_n\right) + P^{(-)}_i v\left(\varsigma_1\right) + R^{(-)}_i v\left(\xi_1\right)\right) + \sum_{i=n+2}^{n+3}\varepsilon^i R^{(-)}_i v\left(\xi_1\right), \ \ x\in[0;X_{n+1}],\\
&V^{(+)}_{n+1}\left(x,\varepsilon\right) = \sum_{i=0}^{n+1}\varepsilon^i\left(\bar{v}^{(+)}_i\left(x\right) + Q^{(+)}_i v\left(\tau_n\right) + P^{(+)}_i v\left(\varsigma_2\right) + R^{(+)}_i v\left(\xi_2\right)\right) + \sum_{i=n+2}^{n+3}\varepsilon^i R^{(+)}_i v\left(\xi_2\right), \ \ x\in[X_{n+1};1].
\end{aligned}
\tag{35}
$$

Параметр x^*, входящий в Q-функции в суммах (35) заменен на X_{n+1}.

Положим

$$
U_{n+1}\left(x,\varepsilon\right) = \begin{cases} U^{(-)}_{n+1}, \ x\in[0;X_{n+1}], \\ U^{(+)}_{n+1}, \ \ x\in[X_{n+1};1], \end{cases}
$$

$$
V_{n+1}\left(x,\varepsilon\right) = \begin{cases} V^{(-)}_{n+1}, \ \ x\in[0;X_{n+1}], \\ V^{(+)}_{n+1}, \ \ x\in[X_{n+1};1]. \end{cases}
$$

Функции U_{n+1} и V_{n+1} по своему построению удовлетворяют уравнениям (1) с точностью $O(\varepsilon^{n+2})$ всюду на $[0;1]$, за исключением точки X_{n+1}, а в этой точке они и их производные имеют разрывы (скачки). Можно провести сглаживание функций U_{n+1} и V_{n+1}, например, так, как это сделано в работе [4], в результате чего они будут удовлетворять уравнениям (1) с точностью $O\left(\varepsilon^{n+2}\right)$ всюду на [0;1], включая точку X_{n+1}.

Граничным условиям функция U_{n+1} удовлетворяет с точностью $O\left(\varepsilon^n\right)$, а функция V_{n+1} — с точностью $O\left(\varepsilon^{n+1}\right)$. Если добавить к U_{n+1} функции $\varepsilon^{n+2}P^{(\mp)}_{n+2}u$, $\varepsilon^{n+2}R^{(\mp)}_{n+2}u$ и $\varepsilon^{n+3}R^{(\mp)}_{n+3}u$, а к V_{n+1} — функцию $\varepsilon^{n+2}P^{(\mp)}_{n+2}v$, то полученные суммы будут удовлетворять граничным условиям точно.

3. ОБОСНОВАНИЕ АСМПТОТИКИ

Теорема. При выполнении условий A1-A4 для достаточно малого $\varepsilon > 0$ существует решение $u(x,\varepsilon)$, $v(x,\varepsilon)$ задачи (1), для которого функции $U_n(x,\varepsilon)$, $V_n(x,\varepsilon)$ являются равномерным на [0;1] асимптотическим приближением с точностью порядка $O(\varepsilon^{n+1})$.

Доказательство теоремы проведем с помощью асимптотического метода дифференциальных неравенств [5, 6]. С этой целью построим пары непрерывных функций $\bar{U}$, $\bar{V}$ и $\underline{U}$, $\underline{V}$, называемые соответственно верхним и нижним решениями задачи (1), таким образом, чтобы они для достаточно малых ε удовлетворяли следующим условиям:

1^0 $\underline{U} \le \bar{U}$; $\underline{V} \le \bar{V}$, $x \in [0,1]$ (упорядоченность верхнего и нижнего решений);

2^0 $L_{1\varepsilon}\left(\bar{U}, v\right) := \varepsilon^4 \bar{U}'' - f\left(\bar{U}, v, x, \varepsilon\right) < 0 < L_{1\varepsilon}\left(\underline{U}, v\right)$; $\underline{V} \le v \le \bar{V}$, $x \in [0;1]$;

$L_{2\varepsilon}\left(u, \bar{V}\right) := \varepsilon^2 \bar{V}'' - g\left(u, \bar{V}, x, \varepsilon\right) < 0 < L_{2\varepsilon}\left(u, \underline{V}\right)$; $\underline{U} \le u \le \bar{U}$, $x \in [0;1]$;

3^0 $\left.\dfrac{d\bar{U}}{dx}\right|_{x=0} \le 0 \le \left.\dfrac{d\underline{U}}{dx}\right|_{x=0}$, $\left.\dfrac{d\bar{V}}{dx}\right|_{x=0} \le 0 \le \left.\dfrac{d\underline{V}}{dx}\right|_{x=0}$, $\left.\dfrac{d\underline{U}}{dx}\right|_{x=1} \le 0 \le \left.\dfrac{d\bar{U}}{dx}\right|_{x=1}$, $\left.\dfrac{d\underline{V}}{dx}\right|_{x=1} \le 0 \le \left.\dfrac{d\bar{V}}{dx}\right|_{x=1}$.

A. Построение верхнего и нижнего решений

Построим функции регулярной части и переходного слоя вплоть до порядка $n+1$ и определим x_{n+1} — коэффициент ряда (4). Обозначим $X_{n+1} = \sum_{i=0}^{n+1} \varepsilon^i x_i$.

Для построения верхнего решения задачи (1) введём точку $\bar{x}(\varepsilon)$:

$$\bar{x}(\varepsilon) = x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \ldots + \varepsilon^{n+1}\left(x_{n+1} - \delta\right) = \\ = X_{n+1} - \varepsilon^{n+1}\delta. \quad (36)$$

где δ — некоторое положительное число.

Верхнее решение задачи (1) слева и справа от точки $\bar{x}$ будем строить отдельно. На отрезке $[0;\bar{x}]$ построим функции $\bar{U}^{(-)}$, $\bar{V}^{(-)}$, а на отрезке $[\bar{x};1]$ — функции $\bar{U}^{(+)}$, $\bar{V}^{(+)}$ и положим

$$\bar{U} = \begin{cases} \bar{U}^{(-)}(x,\varepsilon), & x \in [0;\bar{x}], \\ \bar{U}^{(+)}(x,\varepsilon), & x \in [\bar{x};1]; \end{cases}$$

$$\bar{V} = \begin{cases} \bar{V}^{(-)}(x,\varepsilon), & x \in [0;\bar{x}], \\ \bar{V}^{(+)}(x,\varepsilon), & x \in [\bar{x};1]. \end{cases}$$

В точке $\bar{x}$ будем сшивать функции $\bar{V}^{(-)}$ и $\bar{V}^{(+)}$, $\bar{U}^{(-)}$ и $\bar{U}^{(+)}$ так, чтобы $\bar{V}$ и $\bar{U}$ были непрерывны в этой точке и удовлетворяли равенствам:

$$\begin{aligned} &\bar{V}^{(-)}(\bar{x},\varepsilon) = \bar{V}^{(+)}(\bar{x},\varepsilon) = v^2(\bar{x}), \\ &\bar{U}^{(-)}(\bar{x},\varepsilon) = \bar{U}^{(+)}(\bar{x},\varepsilon) = \phi\left(v^2(\bar{x}), \bar{x}\right). \end{aligned} \quad (37)$$

Положительное число δ в (36) выбирается таким образом, чтобы выполнялись условия:

4^0. $\left(\dfrac{d\bar{U}^{(-)}}{dx} - \dfrac{d\bar{U}^{(+)}}{dx}\right)_{x=\bar{x}} \ge 0;$
$\left(\dfrac{d\bar{V}^{(-)}}{dx} - \dfrac{d\bar{V}^{(+)}}{dx}\right)_{x=\bar{x}} \ge 0.$

Таким неравенствам должно удовлетворять верхнее решение, если в точке $\bar{x}$ оно не является гладким [5, 6]. При этом условия 2^0 должны выполняться всюду на отрезке [0;1], за исключением точки $\bar{x}$.

Введем растянутую переменную $\bar{\tau} = \dfrac{x-\bar{x}}{\varepsilon}$. Очевидно, что $\bar{\tau} \le 0$ при $x \in [0;\bar{x}]$ и $\bar{\tau} \ge 0$ при $x \in [\bar{x};1]$.

Функции $\bar{U}^{(-)}$, $\bar{U}^{(+)}$, $\bar{V}^{(-)}$, $\bar{V}^{(+)}$ будем строить как модификацию функций $U_{n+1}^{(-)}$, $U_{n+1}^{(+)}$, $V_{n+1}^{(-)}$, $V_{n+1}^{(+)}$, определенных в (35):

$$\begin{aligned}
\bar{U}^{(-)} &= \left.U_{n+1}^{(-)}\right|_{\bar{\tau}} + \varepsilon^{n+1}\left(\alpha^{(-)}(x) + \tilde{Q}^{(-)}u(\bar{\tau})\right) + \varepsilon^{n+2}\left(\tilde{P}_{n+2}^{(-)}u(\varsigma_1) + \tilde{R}_{n+2}^{(-)}u(\xi_1)\right) + \varepsilon^{n+3}\tilde{R}_{n+3}^{(-)}u(\xi_1), \\
\bar{U}^{(+)} &= \left.U_{n+1}^{(+)}\right|_{\bar{\tau}} + \varepsilon^{n+1}\left(\alpha^{(+)}(x) + \tilde{Q}^{(+)}u(\bar{\tau})\right) + \varepsilon^{n+2}\left(\tilde{P}_{n+2}^{(+)}u(\varsigma_2) + \tilde{R}_{n+2}^{(+)}u(\xi_2)\right) + \varepsilon^{n+3}\tilde{R}_{n+3}^{(+)}u(\xi_2); \\
\bar{V}^{(-)} &= \left.V_{n+1}^{(-)}\right|_{\bar{\tau}} + \varepsilon^{n+1}\left(\beta^{(-)}(x) + \tilde{Q}^{(-)}v(\bar{\tau})\right) + \varepsilon^{n+2}\tilde{P}_{n+2}^{(-)}v(\varsigma_1) + \varepsilon^{n+3}\tilde{R}_{n+3}^{(-)}v(\xi_1), \\
\bar{V}^{(+)} &= \left.V_{n+1}^{(+)}\right|_{\bar{\tau}} + \varepsilon^{n+1}\left(\beta^{(+)}(x) + \tilde{Q}^{(+)}v(\bar{\tau})\right) + \varepsilon^{n+2}\tilde{P}_{n+2}^{(+)}v(\varsigma_2) + \varepsilon^{n+3}\tilde{R}_{n+3}^{(+)}v(\xi_2).
\end{aligned}$$

Здесь через $\left.U_n^{(-)}\right|_{\bar{\tau}}$, $\left.U_n^{(+)}\right|_{\bar{\tau}}$, $\left.V_{n+1}^{(-)}\right|_{\bar{\tau}}$, $\left.V_{n+1}^{(+)}\right|_{\bar{\tau}}$ обозначены функции (35), в которых аргумент τ Q–функций заменен на $\bar{\tau}$, а параметр X_{n+1} на $\bar{x}$. Функции $\alpha^{(\mp)}(x)$, $\beta^{(\mp)}(x)$, а также $\tilde{Q}$–функции выбираются далее так, чтобы выполнялись условия 1^0, 2^0 и 4^0, а $\tilde{P}$- и $\tilde{R}$–функции так, чтобы выполнялись условия 3^0.

Определим функции $\alpha^{(-)}(x)$, $\beta^{(-)}(x)$ и $\beta^{(+)}(x)$, $\alpha^{(+)}(x)$ как решения систем уравнений

$$\begin{aligned} &\bar{f}_u^{(\mp)}(x)\alpha^{(\mp)} + \bar{f}_v^{(\mp)}(x)\beta^{(\mp)} = A, \\ &\bar{g}_u^{(\mp)}(x)\alpha^{(\mp)} + \bar{g}_v^{(\mp)}(x)\beta^{(\mp)} = B, \end{aligned} \quad (38)$$

где A и B — положительные числа.

Запишем решение системы (38):

$$\alpha^{(\mp)}(x)=\frac{\bar{g}_v^{(\mp)}(x)\,A-\bar{f}_v^{(\mp)}(x)\,B}{\Delta^{(\mp)}(x)},\qquad \beta^{(\mp)}(x)=\frac{\bar{f}_u^{(\mp)}(x)\,B-\bar{g}_u^{(\mp)}(x)\,A}{\Delta^{(\mp)}(x)},\tag{39}$$

где $\Delta^{(\mp)}(x)$ определены равенствами (11). Функции $\alpha^{(\mp)}(x)$ и $\beta^{(\mp)}(x)$ положительны. Это следует из условий A1, A2 и A4, а также из неравенства

$$\bar{g}_v^{(\mp)}(x)=h_v\left(v^{1,3}(x),x\right)-\bar{g}_u^{(\mp)}(x)\,\bar{\phi}_v^{1,3}(x)=$$
$$=h_v\left(v^{1,3}(x),x\right)+\bar{g}_u^{(\mp)}(x)\left(\bar{f}_u^{(\mp)}(x)\right)^{-1}\bar{f}_v^{(\mp)}(x)>0.$$

Уравнения для функций $\tilde{Q}^{(\mp)}u$, $\tilde{Q}^{(\mp)}v$ получаются тем же методом, что и для $Q_{n+1}^{(\mp)}u$, $Q_{n+1}^{(\mp)}v$, и содержат слагаемые, возникающие в результате модификации регулярной части — добавок $\varepsilon^{n+1}\alpha^{(\mp)}(x)$ и $\varepsilon^{n+1}\beta^{(\mp)}(x)$ для компонент u и v, соответственно. Функции $\tilde{Q}^{(\mp)}u(\bar{\tau})$ связаны с $\tilde{Q}^{(\mp)}v(\bar{\tau})$ равенствами

$$\tilde{Q}^{(\mp)}u(\bar{\tau})+\alpha^{(\mp)}(\bar{x})=\phi_v\left(\tilde{v}(\bar{\tau},\bar{x}),\bar{x}\right)\times\times\left(\tilde{Q}^{(\mp)}v(\bar{\tau})+\beta^{(\mp)}(\bar{x})\right)+\frac{A}{f_u(\bar{\tau})}\tag{40}$$

где число A — то же, что и в (38).

Функции $\tilde{Q}^{(\mp)}v(\bar{\tau})$ определим как решения уравнений

$$\frac{d^2\tilde{Q}^{(\mp)}v}{d\bar{\tau}^2}=g_u(\bar{\tau})\left(\alpha^{(\mp)}(\bar{x})+\tilde{Q}^{(\mp)}u\right)+g_v(\bar{\tau})\left(\beta^{(\mp)}(\bar{x})+\tilde{Q}^{(\mp)}v\right)-\bar{g}_u^{(\mp)}(\bar{x})\cdot\alpha^{(\mp)}(\bar{x})-\bar{g}_v^{(\mp)}(\bar{x})\,\beta^{(\mp)}(\bar{x})$$

с краевыми условиями

$$\tilde{Q}^{(\mp)}v(\mp\infty)=0,\;\;\tilde{Q}^{(\mp)}v(0)=-\beta^{(\mp)}(\bar{x}).\tag{41}$$

Используя соотношения (38) и (40), перепишем уравнения в виде:

$$\frac{d^2\tilde{Q}^{(\mp)}v}{d\bar{\tau}^2}=h_v(\bar{\tau})(\tilde{Q}^{(\mp)}v+\beta^{(\mp)}(\bar{x}))+\frac{g_u(\bar{\tau})A}{f_u(\bar{\tau})}-B\tag{42}$$

Решения задач (41)–(42) выписываются в явном виде:

$$\tilde{Q}^{(\mp)}v(\bar{\tau})=-\frac{\Phi_{1,3}(\bar{\tau})}{\Phi(0)}\beta^{(\mp)}(\bar{x})+\Phi_{1,3}(\bar{\tau})\int_0^{\bar{\tau}}\frac{d\tau_2}{\Phi_{1,3}^2(\tau_2)}\int_{\mp\infty}^{\tau_2}\Phi_{1,3}(\tau_1)\left(h_v(\tau_1)\,\beta^{(\mp)}(\bar{x})+\frac{g_u(\tau_1)\,A}{f_u(\tau_1)}-B\right)d\tau_1\tag{43}$$

Заметим, что для функций $\tilde{Q}^{(\mp)}u(\bar{\tau})$, $\tilde{Q}^{(\mp)}v(\bar{\tau})$ имеют место экспоненциальные оценки типа (22).

Нижнее решение $\underline{V},\underline{U}$ задачи (5) построим по аналогии с верхним. Зададим точку перехода для нижнего решения $\underline{x}$ с помощью ряда

$$\underline{x}(\varepsilon)=x_0+\varepsilon x_1+\varepsilon^2x_2+\ldots+\varepsilon^{n+1}(x_{n+1}+\delta)=X_{n+1}+\varepsilon^{n+1}\delta,\tag{44}$$

где величина δ та же, что и в (36).

В окрестности точки $\underline{x}$ введем растянутую переменную $\underline{\tau}=\frac{x-\underline{x}}{\varepsilon}$.

Нижнее решение задачи (5) слева и справа от точки $\underline{x}$ будем строить отдельно на отрезках $[0,\underline{x}]$ и $[\underline{x},1]$:

$$\underline{U}=\begin{cases}\underline{U}^{(-)}(x,\varepsilon), & x\in[0,\bar{x}]\,,\\ \underline{U}^{(+)}(x,\varepsilon), & x\in[\bar{x},1]\,;\end{cases}\qquad \underline{V}=\begin{cases}\underline{V}^{(-)}(x,\varepsilon), & x\in[0,\bar{x}]\,,\\ \underline{V}^{(+)}(x,\varepsilon), & x\in[\bar{x},1]\,.\end{cases}$$

В точке $\underline{x}$ будем сшивать функции $\underline{U}^{(-)}$и $\underline{U}^{(+)}$, $\underline{V}^{(-)}$ и $\underline{V}^{(+)}$ до непрерывности так, чтобы выполнялись равенства, аналогичные (37), но с заменой верхнего решения на нижнее. В этой точке нижнее решение не является гладким. Будем строить его таким образом, чтобы выполнялись неравенства:

5^0. $$\left(\frac{d\underline{U}^{(-)}}{dx}-\frac{d\underline{U}^{(+)}}{dx}\right)_{x=\underline{x}}\leq 0;\qquad \left(\frac{d\underline{V}^{(-)}}{dx}-\frac{d\underline{V}^{(+)}}{dx}\right)_{x=\underline{x}}\leq 0.$$

Функции $\underline{U}^{(-)},\underline{U}^{(+)}$, $\underline{V}^{(-)},\underline{V}^{(+)}$, будем строить как модификацию функций из (35):

$$\underline{U}^{(-)}=U_{n+1}^{(-)}\Big|_{\underline{\tau}}-\varepsilon^{n+1}\left(\alpha^{(-)}(x)+\tilde{Q}^{(-)}u(\underline{\tau})\right)+\varepsilon^{n+2}\left(\tilde{P}_{n+2}^{(-)}u(\varsigma_1)+\tilde{R}_{n+2}^{(-)}u(\xi_1)\right)+\varepsilon^{n+3}\tilde{R}_{n+3}^{(-)}u(\xi_1)\,,$$

$$\underline{U}^{(+)} = U_{n+1}^{(+)}\Big|_{\underline{\tau}} - \varepsilon^{n+1}\left(\alpha^{(+)}(x) + \tilde{Q}^{(+)}u(\underline{\tau})\right) + \varepsilon^{n+2}\left(\tilde{P}_{n+2}^{(+)}u(\varsigma_2) + \tilde{R}_{n+2}^{(+)}u(\xi_2)\right) + \varepsilon^{n+3}\tilde{R}_{n+3}^{(+)}u(\xi_2);$$

$$\underline{V}^{(-)} = V_{n+1}^{(-)}\Big|_{\underline{\tau}} - \varepsilon^{n+1}\left(\beta^{(-)}(x) + \tilde{Q}^{(-)}v(\underline{\tau})\right) + \varepsilon^{n+2}\tilde{P}_{n+2}^{(-)}v(\varsigma_1) + \varepsilon^{n+3}\tilde{R}_{n+3}^{(-)}v(\xi_1),$$

$$\underline{V}^{(+)} = V_{n+1}^{(+)}\Big|_{\underline{\tau}} - \varepsilon^{n+1}\left(\beta^{(+)}(x) + \tilde{Q}^{(+)}v(\underline{\tau})\right) + \varepsilon^{n+2}\tilde{P}_{n+2}^{(+)}v(\varsigma_2) + \varepsilon^{n+3}\tilde{R}_{n+3}^{(+)}v(\xi_1).$$

Здесь функции $\alpha^{(\mp)}(x)$, $\beta^{(\mp)}(x)$ те же, что в (39), функции $\tilde{Q}^{(\mp)}u(\underline{\tau})$ и $\tilde{Q}^{(\mp)}v(\underline{\tau})$ те же, что в (40) и (43) с заменой $\bar{\tau}$ на $\underline{\tau}$, а $\tilde{P}$- и $\tilde{R}$–функции такие же, как и для верхнего решения.

При указанном способе построения функций $\underline{U}$, $\underline{V}$ выполнение неравенств 1^0, 2^0, 3^0 и 4^0 для верхнего решения обеспечивает выполнение аналогичных неравенств для нижнего решения.

B. Проверка выполнения условий метода дифференциальных неравенств

Пусть $n \geq 2$. Проверим сначала выполнение условия 1^0 упорядоченности верхнего и нижнего решений на промежутке [0;1].

Разность верхнего и нижнего решений дается выражениями:

$$\begin{array}{lll} \overline{U} - \underline{U} = \overline{U}^{(-)} - \underline{U}^{(-)}, & \overline{V} - \underline{V} = \overline{V}^{(-)} - \underline{V}^{(-)}, & 0 \leq x \leq \overline{x}; \\ \overline{U} - \underline{U} = \overline{U}^{(+)} - \underline{U}^{(-)}, & \overline{V} - \underline{V} = \overline{V}^{(+)} - \underline{V}^{(-)}, & \overline{x} \leq x \leq \underline{x}; \\ \overline{U} - \underline{U} = \overline{U}^{(+)} - \underline{U}^{(+)}, & \overline{V} - \underline{V} = \overline{V}^{(+)} - \underline{V}^{(+)}, & \underline{x} \leq x \leq 1. \end{array} \tag{45}$$

При $\overline{x} \leq x \leq \underline{x}$ имеем:

$$\overline{U} - \underline{U} = \overline{U}^{(+)} - \underline{U}^{(-)} = \textstyle\sum_{i=0}^{n}\varepsilon^i\left(\overline{u}_i^{(+)}(x) + Q_i^{(+)}u(\overline{\tau})\right) - \sum_{i=0}^{n}\varepsilon^i\left(\overline{u}_i^{(-)}(x) + Q_i^{(-)}u(\underline{\tau})\right) + O\left(\varepsilon^{n+1}\right). \tag{46}$$

$$\overline{V} - \underline{V} = \overline{V}^{(+)} - \underline{V}^{(-)} = \textstyle\sum_{i=0}^{n}\varepsilon^i\left(\overline{v}_i^{(+)}(x) + Q_i^{(+)}v(\overline{\tau})\right) - \sum_{i=0}^{n}\varepsilon^i\left(\overline{v}_i^{(-)}(x) + Q_i^{(-)}v(\underline{\tau})\right) + O\left(\varepsilon^{n+1}\right); \tag{47}$$

На рассматриваемом отрезке $[\underline{x};\overline{x}]$ выполняются неравенства $|x - X_{n+1}| \leq \varepsilon^{n+1}\delta$, $-2\varepsilon^n\delta \leq \underline{\tau} \leq 0$, $0 \leq \overline{\tau} \leq 2\varepsilon^n\delta$, поэтому

$$\begin{array}{ll} \overline{v}_i^{(+)}(x) = \overline{v}_i^{(+)}(X_{n+1}) + O\left(\varepsilon^{n+1}\right); & \overline{v}_i^{(-)}(x) = \overline{v}_i^{(-)}(X_{n+1}) + O\left(\varepsilon^{n+1}\right); \\ Q_i^{(+)}v(\overline{\tau}) = Q_i^{(+)}v(0) + O(\varepsilon^n); & Q_i^{(-)}v(\underline{\tau}) = Q_i^{(-)}v(0) + O(\varepsilon^n). \end{array}$$

Для функции $Q_0^{(+)}v(\overline{\tau})$ получается выражение:

$$Q_0^{(+)}v(\overline{\tau}) = Q_0^{(+)}v(0) + \frac{dQ_0^{(+)}v}{d\overline{\tau}}(0)\cdot\overline{\tau} + O\left(\varepsilon^{2n}\right) = Q_0^{(+)}v(0) + \Phi(0)\cdot\overline{\tau} + O\left(\varepsilon^{n+1}\right)$$

Здесь использовано соотношение.

$$\frac{dQ_0^{(+)}v}{d\overline{\tau}}(0) = \frac{d\tilde{v}}{d\overline{\tau}}(0, X_{n+1}) = \frac{d\tilde{v}}{d\overline{\tau}}(0, x_0) + O(\varepsilon) = \Phi(0) + O(\varepsilon).$$

где $\Phi(0)$ определено в (31).

Равенство для $Q_0^{(-)}v(\underline{\tau})$ получается аналогично:

$$Q_0^{(-)}v(\underline{\tau}) = Q_0^{(-)}v(0) + \Phi(0)\cdot\underline{\tau} + O\left(\varepsilon^{n+1}\right).$$

Наконец, запишем соотношения для остальных функций $Q_i^{(\mp)}v$ при $i = 1, 2, \ldots n$

$$Q_i^{(+)}v\left(\overline{\tau}\right) = Q_i^{(+)}v\left(0\right) + O\left(\varepsilon^n\right); \quad Q_i^{(-)}v\left(\underline{\tau}\right) = Q_i^{(-)}v\left(0\right) + O\left(\varepsilon^n\right).$$

Подставляя эти выражения в (47) и учитывая, что

$$\sum_{i=0}^{n}\varepsilon^i\left(\overline{v}_i^{(+)}\left(X_{n+1}\right) + Q_i^{(+)}v\left(0\right)\right) - \sum_{i=0}^{n}\varepsilon^i\left(\overline{v}_i^{(-)}\left(X_{n+1}\right) + Q_i^{(-)}v\left(0\right)\right) = O\left(\varepsilon^{n+1}\right)$$

а $\overline{\tau} - \underline{\tau} = 2\varepsilon^n\delta$, приходим к равенствам:

$$\overline{V} - \underline{V} = \Phi\left(0\right)\left(\overline{\tau} - \underline{\tau}\right) + O\left(\varepsilon^{n+1}\right) = 2\varepsilon^n\delta\Phi\left(0\right) + O\left(\varepsilon^{n+1}\right). \tag{48}$$

Так как $\Phi\left(0\right) > 0$ и $\delta > 0$, то для достаточно малых ε выполняется неравенство

$$\overline{V}\left(x,\varepsilon\right) - \underline{V}\left(x,\varepsilon\right) > 0, \quad x \in \left[\overline{x};\underline{x}\right].$$

Из равенства (46) аналогичным образом получаем

$$\overline{U}\left(x,\varepsilon\right) - \underline{U}\left(x,\varepsilon\right) = 2\phi_v\left(v^2,x_0\right)\Phi\left(0\right)\delta\varepsilon^n + O\left(\varepsilon^{n+1}\right) > 0, \quad x \in \left[\overline{x};\underline{x}\right], \tag{49}$$

поскольку $\phi_v\left(v^2,x_0\right) = -\dfrac{f_v\left(\phi\left(v^2,x_0\right),v^2,x_0,0\right)}{f_u\left(\phi\left(v^2,x_0\right),v^2,x_0,0\right)} > 0$ в силу условий A1 и A4.

Рассмотрим теперь разность V-компонент верхнего и нижнего решений при $\underline{x} \le x \le 1$ (см.(45)), где $\underline{\tau} \ge 0$, $\overline{\tau} \ge 2\varepsilon^n\delta$:

$$\begin{aligned}\overline{V} - \underline{V} &= \overline{V}^{(+)} - \underline{V}^{(+)} = \\ &= 2\varepsilon^{n+1}\beta^{(+)}\left(x\right) + \sum_{i=0}^{n+1}\varepsilon^i\left(\left(Q_i^{(+)}v\left(\overline{\tau}\right) - Q_i^{(+)}v\left(\underline{\tau}\right)\right)\right) + \varepsilon^{n+1}\left(\tilde{Q}^{(+)}v\left(\overline{\tau}\right) - \tilde{Q}^{(+)}v\left(\underline{\tau}\right)\right) = \\ &= 2\varepsilon^{n+1}\beta^{(+)}\left(x\right) + \frac{dQ_0^{(+)}v}{d\tau}\left(\underline{\tau}\right)\left(\overline{\tau} - \underline{\tau}\right) + O\left(\varepsilon^{n+1}\right)\exp\left(-\kappa_1\underline{\tau}\right) + O\left(\varepsilon^{n+2}\right),\end{aligned} \tag{50}$$

где $\kappa_1 > 0$ — некоторое число и $\dfrac{dQ_0^{(+)}v}{d\tau}\left(\underline{\tau}\right) \ge C\exp\left(-\kappa_0\underline{\tau}\right)$.

Используя равенство $\overline{\tau} - \underline{\tau} = 2\varepsilon^n\delta$, из (50) получаем:

$$\begin{aligned}\overline{V} - \underline{V} \ge 2\varepsilon^{n+1}\beta^{(+)}\left(x\right) + C_0\varepsilon^n\exp\left(-\kappa_0\underline{\tau}\right) - \\ - C_1\varepsilon^{n+1}\exp\left(-\kappa_1\underline{\tau}\right) + O\left(\varepsilon^{n+2}\right),\end{aligned} \tag{51}$$

где $C_0 > 0$ и $C_1 > 0$ — некоторые числа.

Если $\kappa_0 \le \kappa_1$, то выражение в (51) положительно, так как $C_0 > C_1\varepsilon$ для достаточно малых ε. Следовательно, $\overline{V} - \underline{V} > 0$.

Пусть $\kappa_0 > \kappa_1$. Рассмотрим сначала отрезок $\underline{x} \le x \le \tilde{x} := \underline{x} + N\varepsilon$. На этом отрезке выполняется неравенство $\exp\left(-\kappa_0\underline{\tau}\right) \ge \exp\left(-\kappa_0 N\right)$, поэтому выражение (51) положительно при достаточно малых ε за счет слагаемого $C_0\varepsilon^n\exp\left(-\kappa_0\underline{\tau}\right)$:

$$C_0\varepsilon^n\exp\left(-\kappa_0\underline{\tau}\right) \ge C_0\varepsilon^n\exp\left(-\kappa_0 N\right) = \varepsilon^n\tilde{C}_0 > \varepsilon^{n+1}C_1.$$

Следовательно, на рассматриваемом отрезке $\overline{V} - \underline{V} > 0$.

На отрезке $\underline{x} + N\varepsilon \le x \le 1$ выполняется неравенство

$$\begin{aligned}&2\varepsilon^{n+1}\beta^{(+)}\left(x\right) - C_1\varepsilon^{n+1}\exp\left(-\kappa_1\underline{\tau}\right) \ge \\ &\ge \varepsilon^{n+1}\left(2\min_{[0;1]}\beta^{(+)}\left(x\right) - C_1\exp\left(-\kappa_1 N\right)\right) > 0\end{aligned}$$

благодаря выбору числа N. Значит, на этом отрезке также $\overline{V} - \underline{V} > 0$.

Итак, $\overline{V}\left(x,\varepsilon\right) - \underline{V}\left(x,\varepsilon\right) > 0$. всюду при $\underline{x} \le x \le 1$.

Аналогично, используя равенства

$$\frac{dQ_0^{(\mp)}u}{d\underline{\tau}}\left(\underline{\tau}\right) = \phi_v\left(\tilde{v}\left(\underline{\tau},\underline{x}\right),\underline{x}\right)\frac{dQ_0^{(\mp)}v}{d\underline{\tau}}\left(\underline{\tau}\right)$$

и неравенство $\phi_v\left(\tilde{v}\left(\underline{\tau},\underline{x}\right),\underline{x}\right) > 0$ можно доказать упорядоченность U-компонент верхнего и нижнего решений на отрезке $\overline{x} \le x \le 1$.

Доказательство справедливости неравенств $\overline{U} - \underline{U} > 0$ и $\overline{V} - \underline{V} > 0$ при $0 \le x \le \overline{x}$ проводится так же, как и при $\overline{x} \le x \le 1$.

Проверим выполнение дифференциальных неравенств 2^0 для верхнего решения.

Ввиду требования квазимонотонности A4, условия 2^0 для верхнего решения будут выполнены, если имеют место следующие неравенства:

$$L_{1\varepsilon}\left(\overline{U},\overline{V}\right)<0,\quad L_{2\varepsilon}\left(\overline{U},\overline{V}\right)<0,\quad x\in[0;1]\,. \qquad (52)$$

Из самого способа построения верхнего решения следуют равенства

$$L_{1\varepsilon}\left(\overline{U},\overline{V}\right)=-\varepsilon^{n+1}A+O\left(\varepsilon^{n+2}\right),$$

$$L_{2\varepsilon}\left(\overline{U},\overline{V}\right)=-\varepsilon^{n+1}B+O\left(\varepsilon^{n+2}\right),$$

где $A>0,\ B>0$ - числа, которые связаны с функциями $\alpha^{(\mp)}\left(x\right),\ \beta^{(\mp)}\left(x\right)$ уравнениями (38). Отсюда непосредственно вытекают неравенства (52) для достаточно малых ε. Аналогично проверяется выполнение неравенств 2^0 для нижнего решения.

Функции $\tilde{P}^{(\mp)}_{n+2}u\left(\varsigma_{1,2}\right),\tilde{R}^{(\mp)}_{n+3}u\left(\xi_{1,2}\right)$ и $\tilde{P}^{(\mp)}_{n+2}v\left(\varsigma_{1,2}\right)$ можно определить так, что верхнее и нижнее решения будут точно удовлетворять граничным условиям задачи (1), а значит, условия 3^0 будут выполнены.

Проверим выполнение неравенств 4^0 для верхнего решения.

Разложим величину $\varepsilon\left(\dfrac{d\overline{V}^{(-)}}{dx}\left(\overline{x},\varepsilon\right)-\dfrac{d\overline{V}^{(+)}}{dx}\left(\overline{x},\varepsilon\right)\right)$ в ряд по степеням ε с учетом представления (36) для точки $\overline{x}$. Учтем, что коэффициенты при ε^i для $i=0,1,\ldots,n$ равны нулю в силу проведенного сшивания формальных асимптотик (а именно, в силу равенств (23) и (34) для $k=1,\ldots,n$), а в порядке ε^{n+1} это разложение содержит только слагаемые, возникшие за счет добавок $\varepsilon^{n+1}\alpha^{(\mp)}\left(x\right)$ и $\varepsilon^{n+1}\beta^{(\mp)}\left(x\right)$ в регулярную часть верхнего решения, а также замены точки X_{n+1} на $\overline{x}$. В результате придем к равенству:

$$\varepsilon\left(\frac{d\overline{V}^{(-)}}{dx}\left(\overline{x},\varepsilon\right)-\frac{d\overline{V}^{(+)}}{dx}\left(\overline{x},\varepsilon\right)\right)=-\varepsilon^{n+1}\delta\frac{1}{\Phi\left(0\right)}\frac{dJ}{dx}\left(x_0\right)+\varepsilon^{n+1}\left(\frac{d\tilde{Q}^{(-)}v}{d\overline{\tau}}\left(0\right)-\frac{d\tilde{Q}^{(+)}v}{d\overline{\tau}}\left(0\right)\right)+O\left(\varepsilon^{n+2}\right), \qquad (53)$$

где $J\left(x\right)$ — функция, определенная в (2), а входящая в выражения для производных $\dfrac{d\tilde{Q}^{(\mp)}v}{d\overline{\tau}}\left(0\right)$величина $\overline{x}$ заменена на x_0.

Вычислим производные функций $\tilde{Q}^{(\mp)}v\left(\overline{\tau}\right)$, используя их явные выражения (43), и подставим в равенство (53). Тогда получим:

$$\frac{d\overline{V}^{(-)}}{dx}\left(\overline{x},\varepsilon\right)-\frac{d\overline{V}^{(+)}}{dx}\left(\overline{x},\varepsilon\right)=-\varepsilon^{n}\delta\frac{1}{\Phi(0)}\frac{dJ}{dx}\left(x_0\right)+\varepsilon^{n}\frac{1}{\Phi(0)}\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi(\overline{\tau})\left(\frac{g_u(\overline{\tau})A}{f_u(\overline{\tau})}-B\right)d\overline{\tau}+O\left(\varepsilon^{n+1}\right)$$

Выберем теперь число $\delta>0$ таким образом, чтобы при достаточно малых ε правая часть этого равенства стала положительной. Тогда неравенство 4^0 для V-компоненты верхнего решения будет выполнено. Выбор такого положительного δ возможен благодаря условию A3.

Разность производных U-компоненты верхнего решения в точке $\overline{x}$ можно представить следующим образом:

$$\frac{d\overline{U}^{(-)}}{dx}\left(\overline{x},\varepsilon\right)-\frac{d\overline{U}^{(+)}}{dx}\left(\overline{x},\varepsilon\right)=$$
$$=\varepsilon^{n}\phi_v\left(v^2,x_0\right)\left(-\delta\frac{1}{\Phi(0)}\frac{dJ}{dx}\left(x_0\right)+\frac{1}{\Phi(0)}\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi(\overline{\tau})\left(\frac{g_u(\overline{\tau})A}{f_u(\overline{\tau})}-B\right)d\overline{\tau}\right)+O\left(\varepsilon^{n+1}\right). \qquad (54)$$

Последнее выражение получено с использованием (53), и равенств

$$\frac{dQ_0^{(-)}u}{d\overline{\tau}}-\frac{dQ_0^{(+)}u}{d\overline{\tau}}=\phi_v\left(\tilde{v}\left(\overline{\tau},\overline{x}\right),\overline{x}\right)\left(\frac{dQ_0^{(-)}v}{d\overline{\tau}}-\frac{dQ_0^{(+)}v}{d\overline{\tau}}\right)$$

$$\left(\frac{d\tilde{Q}^{(-)}u}{d\overline{\tau}}-\frac{d\tilde{Q}^{(+)}u}{d\overline{\tau}}\right)_{x_0}=\phi_v\left(v^2,x_0\right)\left(\frac{d\tilde{Q}^{(-)}v}{d\overline{\tau}}-\frac{d\tilde{Q}^{(+)}v}{d\overline{\tau}}\right)_{x_0},$$

являющихся следствиями (18) и (40), а также с учетом условия непрерывности (37) для верхнего решения. Неравенство 4^0 для U-компоненты верхнего решения также оказывается выполненным, в силу равенства (54) а также того, что $\phi_v\left(v^2,x_0\right)=-f_v^{-1}\left(0\right)f_u\left(0\right)>0$ (см. условия A1 и A4).

Аналогично доказывается, что при таком же δ выполняются неравенства 5^0 для нижнего решения.

Построенные верхнее и нижнее решения гарантируют существование решения $u(x,\varepsilon), v(x,\varepsilon)$ задачи (1), удовлетворяющего неравенствам [5, 6]:

$$\underline{U}(x,\varepsilon) \le u(x,\varepsilon) \le \overline{U}(x,\varepsilon), \quad \underline{V}(x,\varepsilon) \le v(x,\varepsilon) \le \overline{V}(x,\varepsilon), \quad x \in [0;1].$$

Поскольку $\overline{U}(x,\varepsilon) - \underline{U}(x,\varepsilon) = O(\varepsilon^n)$ и $\overline{V}(x,\varepsilon) - \underline{V}(x,\varepsilon) = O(\varepsilon^n)$, (см. (49) и (51)), то

$$u(x,\varepsilon) = \underline{U}(x,\varepsilon) + O(\varepsilon^n) = U_n(x,\varepsilon) + O(\varepsilon^n) = U_{n-1}(x,\varepsilon) + O(\varepsilon^n),$$

и также $v(x,\varepsilon) = V_{n-1}(x,\varepsilon) + O(\varepsilon^n)$. Заменяя n на $n+1$, получаем утверждение теоремы.Существование верхнего и нижнего решений, удовлетворяющих дифференциальным неравенствам 1^0–5^0 доказывает справедливость сформулированной теоремы.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 12-01-00387 и 13-01-00200).

[1] *Бутузов В. Ф., Неделько И. В* Ж. вычисл.матем. и матем. физ. **40** №6, С. 877. (2000).

[2] *Васильева А. Б., Бутузов В. Ф.* Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. (М.: Высш. школа, 1990).

[3] *Васильева А. Б., Плотников А. А.* Асимптотическая теория сингулярно возмущенных задач. (М.: Физический факультет МГУ, 2008).

[4] *Бутузов В. Ф.* Ж. вычисл. матем. и матем. физ. **37**. N 4. С. 415. (1997).

[5] *Нефедов Н. Н.* Дифференц. ур-ния. **31**. №7. С. 1142. (1995).

[6] *Васильева А. Б., Бутузов В. Ф., Нефедов Н. Н.* Труды Математического Института им. В. А. Стеклова. **268**. С. 268. (2010).

Application of the differential inequalities method for justification of asymptotics of the solution of a two ordinary differential equations system in the form of a step-like contrast structure

N. T. Levashova[a], **E. S. Petrovskaya**[b]

M. V. Lomonosov Moscow State University, GSP-1, Leninskie Gory, Moscow, 119991, Russian Federation

E-mail: [a]*natasha@npanalytica.ru,* [b]*petrovskayaev17@mail.ru*

Asymptotic decomposition of the solution of a boundary value problem for a system of two ordinary differential equations in the form of step-like contrast structure is submitted. Using the method of differential inequalities we prove the existence of the solution of the considered problem for which the constructed decomposition is an asymptotic approximation.

PACS: 02.30. Hq

Keywords: small parameter, contrast structure, asymptotic decomposition, method of differential inequalities.

Received 11.12.013.

Сведения об авторах

1. Левашова Наталия Тимуровна — канд. физ.-мат. наук, доцент; тел.: (495) 939-10-33, e-mail: natasha@npanalytica.ru.
2. Петровская Евгения Станиславовна; тел.: (495) 939-10-33, e-mail: petrovskayaev17@mail.ru.