УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ФИЗИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА **5,** 135064 (2013)

ТОЛЩИННЫЕ АКУСТИЧЕСКИЕ РЕЗОНАНСЫ В КАПЛЕ НА ПОДЛОЖКЕ

А.В. Бегарь, А.В. Козлов, В.Г. Можаев
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, физический факультет
annazyr@mail.ru, av_kozlov@inbox.ru, vgmozhaev@mail.ru

Изучение взаимодействий акустических волн с каплями на подложке представляет интерес для измерения параметров капель [1] и создания новых микроэлектронных устройств, получивших название «лабораторий на чипах» [2]. В условиях резонанса эффективность взаимодействий может многократно возрастать, что предопределяет важность изучения резонансов. Особенностью акустических резонансов в капле, прижатой силой тяжести к подложке, является их локализация на центральной оси капли. Причина локализации заключается в искривленности верхней границы капли, действующей подобно фокусирующим зеркалам лазерных резонаторов. Локализованные толщинные резонансы акустических волн в капле на подложке в литературе до сих пор теоретически не изучались, несмотря на то, что теперь этот вопрос в связи с разработкой, созданием и исследованием микрожидкостных акустоэлектронных систем приобрел особое научное и практическое значение. Целью настоящей работы является теоретический анализ таких акустических резонансов. Геометрия рассматриваемой задачи показана на рис. 1.

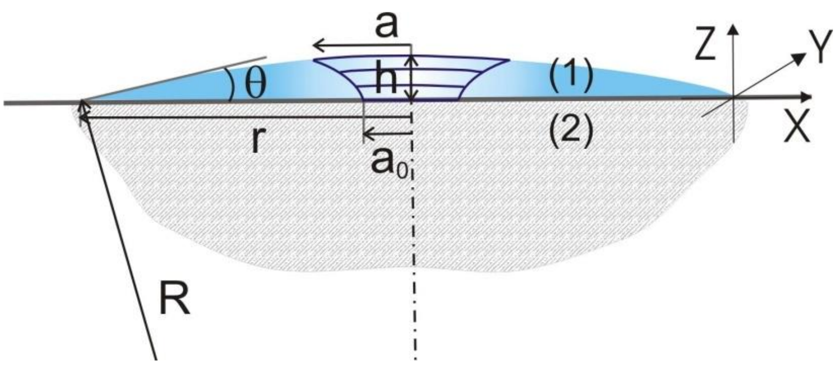

Рис. 1. Резонансные акустические колебания, локализованные на центральной оси в капле (1), лежащей на твердой подложке (2)

Акустические колебания с частотой ω в капле описываются уравнением Гельмгольца для потенциала φ колебательной скорости V

$$\Delta\varphi + k^2\varphi = 0. \quad (1)$$

Здесь k - волновое число для продольных волн в жидкости, $V = -\vec{\nabla}\varphi$. Рассматривая каплю как акустический аналог лазерного резонатора [3,4], решение уравнения (1) можно искать с помощью метода параболического уравнения. Для этого представим решение в виде

$$\varphi = A(x,y,z)\exp(\pm ikz - i\omega t). \tag{2}$$

Считая, что $\partial^2 A/\partial z^2 << k\,\partial A/\partial z$, второй производной $\partial^2 A/\partial z^2$ можно пренебречь. Тогда (1) сводится к параболическому уравнению

$$(\partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2)A \pm 2ik\,\partial A/\partial z = 0. \tag{3}$$

Осесимметричное решение уравнения (3) имеет известный вид [5]

$$A = \frac{A(0)}{(1 \pm iD)}\exp\left[-\frac{r^2}{a_0^2(1 \pm iD)}\right], \tag{4}$$

где $D = 2z/(ka_0^2)$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $A(0)$ и a_0 - амплитуда волны и ширина волнового пучка при $z = 0$. Выделение фазового множителя дает

$$\varphi = \frac{A(0)}{\sqrt{1 + D^2}}\exp\left[-\frac{r^2}{a_0^2(1 + D^2)}\right]\exp[\pm ik\Psi \pm ikz - i\omega t],$$

$$k\Psi = \frac{r^2}{a_0^2}\frac{D}{1 + D^2} - \operatorname{arctg} D. \tag{5}$$

Для нахождения условий резонанса в рассматриваемой системе решение представим в виде интерференции двух встречных волн

$$\varphi = \frac{A(0)}{\sqrt{1 + D^2}}\exp\left[-\frac{r^2}{a_0^2(1 + D^2)}\right]\cos(k\Psi + kz + \delta)\cos\omega t, \tag{6}$$

где δ – фазовый сдвиг поля стоячих волн относительно границы подложки $z = 0$. Для возбуждения резонансов необходимо, чтобы форма волнового фронта интерферирующих встречных волн соответствовала форме верхней поверхности капли. По аналогии с лазерными резонаторами [4] потребуем, чтобы совпадали лишь радиусы кривизны волнового фронта гауссовых пучков $R(z)$ на их оси и поверхности капли на ее вершине. Радиус кривизны волнового фронта $R(z)$ в гауссовых пучках определяется на оси пучков выражением [4]

$$R(z) = z + \frac{k^2 a_0^4}{4z}. \tag{7}$$

На границе контакта капли с подложкой должно выполняется граничное условие абсолютно жесткой стенки $\partial\varphi/\partial z\big|_{z=0} = 0$, откуда находится $\delta = -1/ka^2$. Условие абсолютно мягкой границы $\varphi = 0$ на верхней поверхности капли выполняется, когда

$$k\Psi_0 + kh = \frac{\pi}{2} + \pi n, \tag{8}$$

где $\Psi_0 = \Psi(z = h)$. Значение Ψ_0 согласно (8) выражается через $D(z = h)$. Входящий в определение D множитель с помощью выражения (6) при $z = h$ представим как $\frac{ka_0^2}{2} = \sqrt{h(R-h)}$. Это сводит выражение для Ψ_0 к виду $k\Psi_0 = -\mathrm{arctg}\frac{h}{\sqrt{h(R-h)}}$. Квадратный корень в этом выражении можно исключить, переходя к двойному углу. Таким образом (8) преобразуется в выражение для резонансных частот f_n капли

$$f_n = \frac{(n+1/2)v}{2h} + \frac{v}{2\pi h}\arccos\left(1 - \frac{2h}{R}\right), \tag{9}$$

где v – скорость акустических волн в капле. В отличие от известной формулы для лазерных резонаторов в (9) входит множитель $(n+1/2)$, а не n. Это связано с асимметрией граничных условий на верхней и нижней границах капли, в лазерных резонаторах граничные условия на отражающих зеркалах относятся к одинаковому типу.

Далее необходимо связать коэффициенты, входящие в выражение (9), с параметрами капли. Для этого воспользуемся известным фактом, что для малых капель сила поверхностного натяжения является значительно более важным фактором, чем сила тяжести. В таком приближении капля на подложке весьма близка к сфере, что позволяет легко рассчитать ее основные параметры. Высота капли h и радиус кривизны поверхности сферы R рассчитываются по формулам $h = R(1-\cos\theta)$, $R = r/\sin\theta$, где θ – контактный угол смачивания. Теперь по известным параметрам задачи, таким как радиус капли и контактный угол, можно рассчитать частоты толщинных резонансов локализованных мод в капле и размер области локализации этих мод. Если считать, что угол смачивания подложки из ниобата лития с водой $\theta = 15^\circ$, а радиус капли r составляет 5 мм [6,7], тогда для радиуса кривизны капли и ее высоты получаем значения $R = 19{,}3$ мм, $h = 0{,}66$ мм. По формуле (6) находим резонансные частоты и соответствующие им поперечные размеры гауссовой моды (рис. 2) на нижней – a_0 (сплошные линии) и верхней – a (пунктирные линии) поверхностях капли, которые связаны между собой соотношением $a^2(z) = a_0^2(1+D^2)$. Из приведенных выше формул можно, например, рассчитать, что для 1-ой моды резонансная частота будет составлять 7,1 МГц, а для 21-ой моды она равна 29,8 МГц, а это наиболее близко соответствует сигналу свертки на 30 МГц для частот входных сигналов 15 МГц, использовавшихся в ранее проведенном эксперименте.

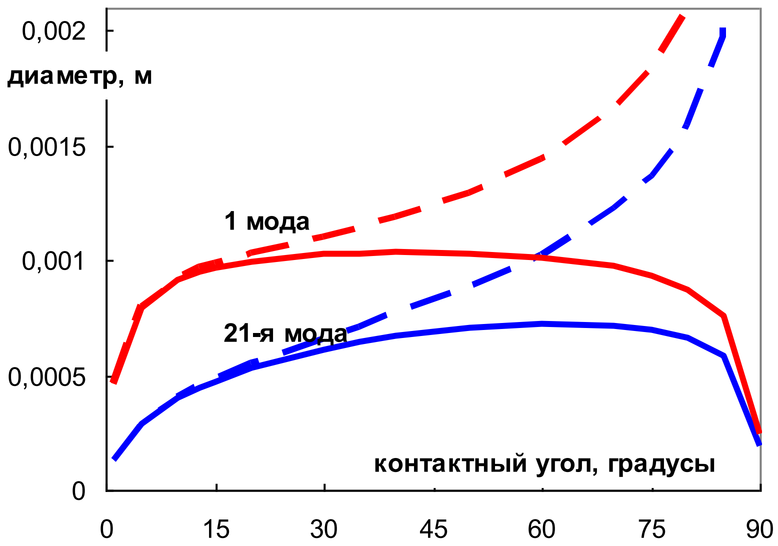

Рис. 2. Диаметр области локализации колебаний в капле фиксированного радиуса на подложке в зависимости от контактного угла для двух резонансных мод. Сплошные линии - граница капли с подложкой, пунктирные – свободная поверхность капли

Проведенный анализ показывает, что каплю на подложке можно рассматривать как акустический аналог лазерного резонатора и использовать для описания акустических резонансов в ней известные методы, развитые в оптике. Выявлен ряд характерных особенностей, отличающих каплю как акустический резонатор от лазерных резонаторов.

Работа поддержана частично грантом РФФИ 11-02-01499-а.

ЛИТЕРАТУРА

1. McKenna L., Newton M.I., McHale G., Lucklum R., Schroeder J. // J. App. Phys. 2001. V. 89. No 1. P. 676.
2. Wixforth A., Scriba J., Gauer C. // MSTNews. 2002. V. 5. P. 42.
3. Kogelnik H., Li T. // Proc. IEEE. 1966. V. 54. No 10. P. 1312.
4. Быков В.П., Силичев О.О. Лазерные резонаторы. М.: Физматлит. 2004. 320 с.
5. Виноградова М.Б., Руденко О.В., Сухоруков А.П. Теория волн. М.: Наука. 1979. 384 с.
6. Korshak B.A., Mozhaev V.G., Zyrianova A.V. // In: AIP Conference Proceedings. ISNA17. 2006. V. 838. P. 500.
7. Korshak B.A., Mozhaev V.G., Zyrianova A.V. // Proc. IEEE Internat. Ultrason. Symp. 2005. P. 1019.