

## Собственная энергия скалярного заряда

Ю. В. Грац\*

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова,  
физический факультет, кафедра теоретической физики. Россия,  
119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2.

Рассматривается проблема нахождения собственной энергии классической заряженной частицы в искривленном статическом пространстве-времени. Методом размерной регуляризации получено выражение для регуляризованной собственной энергии скалярного заряда в  $(n + 1)$ -мерном пространстве, когда отклонение метрики от плоской относительно мало. Отдельно рассмотрены случаи двух пространственных измерений. Показано, что размерная регуляризация приводит к результатам, которые согласуются с результатами, полученными с использованием других методов регуляризации.

PACS: 11.10.Gh, 11.10.Kk, 11.10.Dh

УДК:530.12, 531.51, 530.145.

Ключевые слова: классическое самодействие, собственная энергия, регуляризация, перенормировка.

## ВВЕДЕНИЕ

В пространстве Минковского явление самодействия классической заряженной частицы было изучено еще в первой половине прошлого века. Было показано, что на ускоренно движущийся заряд действует сила радиационного трения, связанная с потерей импульса и энергии на электромагнитное излучение, и получено общее выражение для этой силы. Соответствующее уравнение движения известно как уравнение Дирака-Лоренца. При этом, как и следовало ожидать, в пространстве Минковского сила самодействия на покоящийся заряд обращается в ноль.

При учете кривизны пространства-времени проблема становится более сложной. В этом случае сила, действующая на движущуюся в гравитационном поле частицу, состоит из двух частей. Одна — это, как и раньше, сила радиационного трения. Другая в общем случае отлична от нуля, даже когда гравитационное поле статическое и частица покоится. При этом, если частица рассматривается как точечная, то консервативная часть силы самодействия расходится. В случае плоского пространства-времени эта расходимость устраняется перенормировкой массы [1], что формально сводится к отбрасыванию расходящейся части. В случае искривленного пространства так поступить уже нельзя. Причина заключается в том, что гравитационное поле искажает дальнедействующее поле заряда таким образом, что различные положения заряженной точки в пространстве перестают быть эквивалентными. С одной стороны, это значит, что перенормированная электромагнитная, скалярная, или связанная с каким-либо другим дальнедействующим полем собственная энергия частицы может зависеть от координат, и, как следствие, появится сила, стремящаяся сместить покоящуюся частицу из занимаемого положения. С другой стороны,

это говорит о том, что эффект самодействия является нелокальным в том смысле, что он определяется структурой пространства-времени в целом. Первоначально этот эффект был изучен для случаев заряженной частицы в поле Шварцшильда [2, 3], Райснера-Нордстрема [4] и Керра [5]. Впоследствии — в поле топологических дефектов [6–10]. Обзор проблемы самодействия и соответствующую библиографию можно найти в работе [11].

План работы таков. В разделе II получено формальное выражение для поправки к собственной энергии точечного скалярного заряда в произвольном  $(n + 1)$ -мерном статическом пространстве-времени. Показано, что метод размерной регуляризации может быть использован для исследования проблемы классической собственной энергии и получено приближенное выражение для перенормированной собственной энергии в случае произвольного относительно слабого гравитационного поля. В качестве примера в разделе III рассмотрен случай  $(2 + 1)$ -мерного пространства-времени. В заключении сформулированы основные результаты.

В работе используется система единиц, в которой  $c = 1$ , и метрика пространства-времени с сигнатурой  $(-, +, +, \dots, +)$ .

## 1. СОБСТВЕННАЯ ЭНЕРГИЯ СКАЛЯРНОГО ЗАРЯДА В СТАТИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ-ВРЕМЕНИ

Рассмотрим безмассовое скалярное поле  $\varphi$  в  $(n + 1)$ -мерном статическом пространстве-времени с метрикой

$$ds^2 = g_{tt} dt^2 + g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad g_{tt} < 0, \\ \mu, \nu = \overline{1, n}, \quad \partial_t g_{tt} = 0 = \partial_t g_{\mu\nu}. \quad (1)$$

В случае статического источника поле  $\varphi$  удовлетворяет уравнению

$$\nabla_\mu \nabla^\mu \varphi = -4\pi J, \quad \partial_t J = 0, \quad (2)$$

\*E-mail: grats@phys.msu.ru

а его энергия

$$E = \frac{1}{8\pi} \int d^n x \sqrt{-g} \nabla_\mu \varphi \nabla^\mu \varphi, \quad g = g_{tt} \det g_{\mu\nu}.$$

Если воспользоваться теоремой Гаусса и уравнением поля (2), то выражение для энергии  $E$  может быть приведено к виду

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} \int d^n x \sqrt{-g} \varphi J = \\ &= 2\pi \int d^n x \sqrt{-g} \int d^n x' \sqrt{-g'} J(x) G(x, x') J(x'), \end{aligned}$$

где  $G(x, x')$  — функция Грина уравнения (2), которая определена как решение уравнения

$$\nabla_\mu \nabla^\mu G(x, x') = -\delta^n(x, x'), \quad \delta^n(x, x') = \frac{\delta^n(x - x')}{\sqrt{-g}}. \quad (3)$$

Для локализованного в точке  $x$  точечного скалярного заряда  $f$

$$J(x') = f \delta^n(x, x'),$$

и выражение для энергии приобретает вид

$$E = 2\pi f^2 G(x, x). \quad (4)$$

Выражение (4) является формальным, поскольку в пределе совпадающих точек функция Грина расходится, и для получения физически осмысленного результата требуется предложить процедуру регуляризации и перенормировки. Эта проблема аналогична известной проблеме квантовой теории поля. Поэтому естественно решать ее методами, которые хорошо рекомендовали себя в квантовой теории.

Если известен явный вид функции Грина, то хорошо работает метод ковариантной раздвижки точек. Однако точное выражение для функции Грина скалярного поля известно только для весьма небольшого числа искривленных пространств. Поэтому ограничимся случаем, когда метрика пространства (1) мало отличается от плоской. Это позволит рассмотреть произвольное число пространственных измерений и воспользоваться методом размерной регуляризации. Возможность рассмотрения произвольного числа пространственных измерений важна и в силу повышенного интереса к теориям в пространствах с  $n \neq 3$ .

Размерная регуляризация заключается в замене  $G(x, x)$  на символ  $G^\varepsilon(x, x)$ , формально соответствующий функции Грина в пространстве  $D = (n - 2\varepsilon)$  измерений (см., например, [12]).

Последующая перенормировка включает разделение  $G^\varepsilon(x, x)$  на две части, одна из которых расходится при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , а другая конечна

$$G^\varepsilon(x, x) = G_{\text{расх}}^\varepsilon(x, x) + G_{\text{кон}}^\varepsilon(x, x), \quad (5)$$

и завершается отбрасыванием расходящейся части  $G_{\text{расх}}^\varepsilon(x, x)$  с последующим переходом к пределу  $\varepsilon \rightarrow 0$

$$G_{\text{рен}}(x, x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ G^\varepsilon(x, x) - G_{\text{расх}}^\varepsilon(x, x) \right]. \quad (6)$$

В случае слабого гравитационного поля уравнение для функции Грина (3) удобно переписать в эквивалентном виде, выделив оператор Лапласа на  $n$ -мерном евклидовом пространстве  $\Delta_E = \delta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu$ ,

$$\begin{aligned} (\Delta_E + V) G(x, x') &= -\delta^{(n)}(x - x'), \\ V &= \partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu) - \Delta_E, \end{aligned} \quad (7)$$

и представить метрику фонового пространства-времени в виде

$$g_{tt} = -1 + h_{tt}, \quad g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}.$$

В рамках теории возмущений решение уравнения (7) символически можно записать следующим образом

$$G = G_0 + G_0 V G_0 + \dots, \quad (8)$$

где  $G_0$  — функция Грина уравнение Лапласа в  $n$ -мерном евклидовом пространстве, а обусловленные кривизной поправки к функции Грина определяются членами ряда (8), начиная со второго.

Для наших целей достаточно ограничиться вычислением первой поправки  $\delta G = G_0 V G_0$  в низшем приближении по  $h_{\mu\nu}$ . С этой точностью оператор возмущения  $V(x, \partial)$ , который построен из метрики, её производных и операторов дифференцирования, имеет вид

$$V(x, \partial) = \frac{\hbar}{2} \Delta_E - h^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu + \frac{1}{2} (\partial_\lambda h) \partial^\lambda - (\partial_\lambda h^{\lambda\tau}) \partial_\tau.$$

Здесь и ниже поднятие и опускание индексов осуществляется с помощью метрики пространства Евклида.

Ниже мы покажем, что в рамках метода размерной регуляризации вклад от первого слагаемого в правой части выражения (8) обращается в ноль. Что касается  $\delta G = G_0 V G_0$ , то используя явный вид функции  $G_0$  нетрудно показать, что в пределе совпадающих точек имеет место формальное выражение

$$\delta G(x, x) = \int \frac{d^n q}{(2\pi)^n} e^{iqx} \int \frac{d^n p}{(2\pi)^n} \frac{1}{p^2(p - q)^2} V(q, ip),$$

где функция  $V(q, ip)$  определена следующим образом

$$V(q, ip) = \int d^n x e^{-iqx} V(x, \partial)|_{\partial \rightarrow ip}. \quad (9)$$

Расходящиеся интегралы по  $d^n p$ , которые возникают в полученном выражении, являются фурье-образами произведений двух функций Грина или

функции Грина и её производных с совпадающими аргументами. Эти интегралы типичны для квантовой теории поля. В рамках метода размерной регуляризации после замены  $n \rightarrow D = (n - 2\varepsilon)$  они сводятся к одному двух

$$J_\mu^\varepsilon = \mu^{2\varepsilon} \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{p_\mu}{p^2 (p - q)^2} = -\frac{(D-1)\Gamma^2(D/2)}{(4\pi)^{D/2}} \frac{\Gamma(D)}{\Gamma(D)} \Gamma\left(1 - \frac{D}{2}\right) (q^2)^{D/2-2} q_\mu \quad (10)$$

или

$$J_{\mu\nu}^\varepsilon = \mu^{2\varepsilon} \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{p_\mu p_\nu}{p^2 (p - q)^2} = \frac{1}{2(4\pi)^{D/2}} \frac{\Gamma^2(D/2)}{\Gamma(D)} \Gamma\left(1 - \frac{D}{2}\right) (q^2)^{D/2-2} \times (q^2 \delta_{\mu\nu} - D q_\mu q_\nu) . \quad (11)$$

В(10) и (11) произвольный параметр  $\mu$ , имеющий размерность массы, вводится для сохранения общей размерности регуляризуемого выражения.

Заметим, что, как это следует из (11),

$$G_0^\varepsilon(x, x) = \delta^{\mu\nu} J_{\mu\nu}^\varepsilon = 0 ,$$

и  $G_0^\varepsilon(x, x)$  не дает вклада в  $G_{\text{расх}}^\varepsilon(x, x)$ . При использовании других методов регуляризации исключение  $G_0(x, x)$  обосновывается перенормировкой массы частицы.

Таким образом, регуляризованная функция Грина в первом порядке теории возмущений имеет вид

$$G^\varepsilon(x, x) = \frac{\mu^{2\varepsilon}}{2(4\pi)^{D/2}} \frac{\Gamma^2(D/2)}{\Gamma(D)} \Gamma\left(1 - \frac{D}{2}\right) \times \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} e^{iqx} (q^2)^{D/2-1} \times \left[ h_{tt} + (2 - D) \left( h - \frac{q^\mu q^\nu}{q^2} h_{\mu\nu} \right) \right] , \quad (12)$$

и зависимость от  $\varepsilon$  может быть окончательно определена после выполнения интегрирования по  $d^D q$ .

Снятие регуляризации осуществляется устремлением  $\varepsilon \rightarrow 0$ . При этом могут появиться ультрафиолетовые расходимости либо из-за наличия простого полюса у стоящей перед интегралом в (12) функции Эйлера при целых неположительных значениях аргумента, либо в интеграле по  $d^D q$ , либо в том и другом месте одновременно.

Отметим, что при нечетном  $D$  полюс гамма-функции отсутствует. Поэтому, если интеграл по  $d^D q$  сходится, то при использовании метода размерной регуляризации расходящаяся часть регуляризованной функции Грина обращается в ноль, а взятая в пределе совпадающих точек перенормированная функция Грина равна

$$G_{\text{рен}}(x, x) = G^\varepsilon(x, x)|_{\varepsilon=0} . \quad (13)$$

Если же  $D$  четное, то интеграл по  $d^D q$  следует вычислять с точностью до членов первого порядка по  $\varepsilon$ . После чего конечная часть выделяется в соответствии с (6).

## 2. СКАЛЯРНЫЙ ЗАРЯД В (2+1)-ТЕОРИИ

Рассмотрим скалярный заряд в (2 + 1)-мерном статическом пространстве.

Воспользовались тем, что двумерная риманова поверхность локально конформна евклидовой плоскости. Это значит, что в окрестности любой точки метрика может быть приведена к виду

$$ds^2 = g_{tt}(x) dt^2 + e^{-\sigma(x)} \delta_{ab} dx^a dx^b , \quad a, b = 1, 2 . \quad (14)$$

В этом случае

$$h_{tt}(x) = g_{tt}(x) + 1 , \quad a \quad h_{ab}(x) = (e^{-\sigma(x)} - 1) \delta_{ab} . \quad (15)$$

Пусть конформные координаты покрывают сечение  $t = \text{const}$  глобально. В этом случае соотношения (14) и (15) справедливы на всем пространстве-времени, и из (12) мы получаем, что при  $|\sigma(x)| \ll 1$

$$G^\varepsilon(x, x) = \frac{1}{8\pi\varepsilon} h_{tt}(x) - \frac{1}{4\pi} (h_{tt}(x) + \sigma(x)) + \text{постоянные члены} + O(\varepsilon) .$$

Следовательно,

$$G_{\text{расх}}^\varepsilon(x, x) = \frac{1}{8\pi\varepsilon} h_{tt}(x)$$

и, таким образом,

$$G_{\text{рен}}(x, x) = -\frac{1}{4\pi} (h_{tt}(x) + \sigma(x)) + \text{постоянные члены} .$$

Появление постоянного слагаемого в перенормированной функции Грина, которое зависит от произвольного параметра  $\mu$ , характерно для метода размерной регуляризации. Оно соответствует конечной перенормировке и не влияет на реально измеримую величину — силу. Эти члены могут быть отброшены, и мы получаем, что

$$E_{\text{рен}}(x) = -\frac{f^2}{2} (h_{tt}(x) + \sigma(x)) .$$

Отдельный интерес представляет ультрастатическое пространство-время, т.е. пространство-время, для которого  $g_{tt} = -1$  ( $h_{tt} = 0$ ). В (2 + 1)-теории это достаточно распространенная ситуация. Ультрастатическими являются пространства точечной массы и системы точечных масс, пылевого облака и др.

При  $h_{tt} = 0$  расходящаяся часть собственной энергии обращается в ноль, а перенормированные функ-

ция Грина и собственная энергия целиком определяются конформным фактором

$$G_{\text{рен}}(x, x) = -\frac{1}{4\pi}\sigma(x) + \text{постоянные члены},$$

$$E_{\text{рен}}(x) = -\frac{f^2}{2}\sigma(x). \quad (16)$$

Этот пример интересен тем, что в случае ультрарастатического пространства-времени уравнения для функции Грина скалярного поля и для потенциала электростатического поля совпадают. Если же при этом  $n = 2$ , то существует его точное решение [8, 10]. Это позволило получить выражение для перенормированной функции Грина с совпадающими аргументами методом ковариантной раздвижки точек. Полученный в [8, 10] результат совпадает с (16) с точностью до конечной перенормировки. Более того, как было показано в [13], в случае ультрарастатического  $(2 + 1)$ -пространства-времени может быть просуммирован и весь ряд теории возмущений (8). При этом результат совпадает с результатом работ [8, 10] и с (16).

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассматривалась проблема вычисления перенормированной собственной энергии классической заряженной точечной частицы во внешнем статическом гравитационном поле. Наш подход заключался в использовании хорошо известного в квантовой теории поля метода размерной регуляризации, который успешно использовался для исследования эффектов поляризации вакуума в искривленном пространстве-времени. Мы показали, что он может быть использован и в классической теории поля в искривленном пространстве при определении собственной энергии точечного заряда.

## Благодарности

Автор выражает благодарность проф. А. В. Борисову за интерес к работе и обсуждение результатов.

- 
- [1] Dirac P. A. M. Proc. Roy. Soc. A. **167**. P. 148. (1938).  
 [2] Vilenkin A. // Phys. Rev. D. **20**. P. 373. (1979).  
 [3] Smith A. G., Will C. M. Phys. Rev. D. **22**. P. 1276. (1980).  
 [4] Leaute B., Linet B. Phys. Lett. A. **58**. P. 5. (1976).  
 [5] Leaute B. Ann. Inst. Henri Poincaré Sect. A. **27**. P. 167. (1977).  
 [6] Bezerra de Mello E. R. Phys. Rev. D. **51**. P. 7140. (1995).  
 [7] Гальцов Д. В., Грац Ю. В., Лаврентьев А. В. Ядерная Физика. **58**. С. 570. (1995).  
 [8] Grats Yu. V., Garcia A. Class. Quantum Grav. **13**.

- P. 189. (1996).  
 [9] Bezerra de Mello E. R., Bezerra V. B., Grats Yu. V. Class. Quantum Grav. **15**. P. 1915. (1998).  
 [10] Грац Ю. В., Россихин А. А. ТМФ. **123**. С. 150. (2000).  
 [11] Хусниутдинов Н. Р. УФН. **175**. №6. С. 603. (2005).  
 [12] Ицксон К. И., Зюбер Ж.-Б. Квантовая теория поля. В двух томах. М.: 1984.  
 [13] Грац Ю. В., Лаврентьев А. В. Вестник МГУ. Физика. Астрономия. №3. С. 63. (1997).

---

## Self-energy of a scalar charge

Yu. V. Grats

Department of Theoretical Physics, Faculty of Physics,  
 M. V. Lomonosov Moscow State University, Moscow 119991, Russia  
 E-mail: grats@phys.msu.ru

The problem of self-energy of a classical charged particle in a curved static space-time is considered. The expression for the regularized self-energy of a scalar charge in a  $(n + 1)$  – dimensional space-time is obtained with the use of the dimensional regularization method. The particular case of two spatial dimensions is considered. It is shown that dimensional regularization leads to the results which are in agreement with the results obtained with the use of other methods of regularization.

PACS: 11.10.Gh, 11.10.Kk, 11.10.Dh

Keywords: classical self-action, self-energy, regularization, renormalization.  
 Received 6 September 2012

## Сведения об авторах

Грац Юрий Владимирович — докт. физ.-мат. наук, профессор; тел.: (495) 939-53-89, e-mail: grats@phys.msu.ru.