

Динамика квантовой запутанности в параметрических оптомеханических системах

О. М. Кирюхин*

*Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова,
физический факультет, кафедра физики колебаний. Россия,
119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2.*

Ш. Л. Данилишин†

*School of Physics, University of Western Australia,
35 Stirling Highway, Crawley 6009, WA, Australia.*
(Статья поступила 10.05.2012; Подписана в печать 14.06.2012)

Современные детекторы гравитационных волн, а также другие прецизионные оптомеханические устройства в ближайшие несколько лет должны достичь такого уровня чувствительности, при котором станет возможным наблюдение квантовых явлений с участием массивных макроскопических объектов [1]. Одной из наиболее интересных экспериментальных задач, имеющей фундаментальное научное значение в данной области является проверка парадокса Эйнштейна–Подольского–Розена в его исходной трактовке, то есть для координат и импульсов макроскопических механических объектов [2]. В настоящей работе изучена динамика квантовой запутанности и возможность ее наблюдения в оптомеханических системах. Для таких систем рассчитана логарифмическая отрицательность [3] — одна из наиболее популярных мер квантовой запутанности — как функция времени. Эта величина характеризует динамику запутанного состояния в системе с диссипацией. Показано, что возникновение квантовой запутанности в системе является следствием динамической эволюции системы, а также, что при определенных параметрах системы возможно существование квантовой запутанности в течение сколь угодно большого времени. Результаты говорят о возможности использования оптомеханических систем в качестве ячеек квантовой памяти.

PACS: 42.50.Dv, 03.65.Ta, 03.67.Mn.

УДК: 530.145.1.

Ключевые слова: квантовая запутанность, оптомеханическая система, логарифмическая отрицательность, парадокс ЭПР.

ВВЕДЕНИЕ

С момента появления квантовой механики остается открытым фундаментальный вопрос: являются ли законы квантовой механики универсальными, или же есть некоторая граница между микроскопическим миром элементарных частиц и полей, «квантовое» которых была неоднократно доказана экспериментами, и макроскопическим миром сложных объектов, состоящих из огромного числа атомов и молекул, поведение которых в любых экспериментах до недавнего времени [4] полностью подчинялось законам классической физики. Что служит причиной подобной двойственности? Применима ли квантовая механика только к системам небольшого числа элементарных частиц и полей, либо же это — универсальная теория, описывающая любые физические объекты от электрона до скопления галактик? Развитие технологии и техники эксперимента в последнее время позволяет перевести этот вопрос из плоскости чистой философии в объект проверки непосредственным физическим экспериментом.

Сделать это можно, например, приготовив достаточно макроскопическое тело или группу тел в квантовом состоянии, не имеющем прямого классического аналога. В действительности сделать это очень сложно, поскольку неклассические квантовые состояния очень чувствительны ко внешним воздействиям и вследствие взаимодействия с окружением распадаются на классическую некогерентную суперпозицию состояний, аналогичную классическому описанию состояния системы в классической статистической физике. Поэтому крайне необходимо найти системы, которые максимально изолированы от внешних воздействий или, другими словами, имеют минимальный уровень классических шумов, приводящих к декогеренции.

Оптомеханические системы, в которых свет заключен в оптический резонатор и взаимодействует с отражающим механическим объектом посредством радиационного давления, стали одним из основных средств по изучению перехода от классических к квантовым состояниям [5]. Важные успехи были достигнуты в приготовлении основного квантового состояния осциллятора [6–18]. В таких системах также возможно проводить эксперименты по квантовой запутанности. В недавних исследованиях [19, 20] были использованы чрезвычайно легкие (массой $\sim 50 - 100$ нг) мембраны из SiN, которые можно рассматривать как неза-

*E-mail: kiryukhin@physics.msu.ru

†E-mail: shtefan.danilishin@uwa.edu.au

висимые высокочастотные механические осцилляторы с низким уровнем тепловых шумов.

В настоящей работе мы изучаем динамику квантовой запутанности в простейшей оптомеханической системе. В разделе 1 представлен гамильтониан системы. В разделе 2 представлены квантовые уравнения Ланжевена, описывающие динамику нашей системы, которые линеаризованы в разделе 3. Далее, в разделе 4 мы находим формулу для вычисления ковариационной матрицы системы, начальное состояние которой описано в разделе 6. В разделе 5 мы представляем простой подход для нахождения ковариационной матрицы стационарного состояния. Затем мы определяем меру запутанности, которую вычисляем для нашей системы (раздел 7). В разделах 8, 9 обсуждаются полученные результаты и теоретически обнаруженные эффекты.

1. ГАМИЛЬТониан СИСТЕМЫ

Простейшая оптомеханическая система, которую мы рассматриваем, представляет собой резонатор Фабри–Перо, в котором одно из зеркал предполагается неподвижным и частично прозрачным и через которое осуществляется оптическая накачка резонатора лазером, тогда как второе зеркало обладает достаточно малой массой (порядка наногаммов) и с динамической точки зрения является механическим осциллятором с собственной частотой колебаний ω_m . Свет взаимодействует с зеркалом посредством светового давления.

Следует отметить, что наше описание справедливо также для оптомеханических систем типа резонаторов с модами шепчущей галереи (МШГ). Примером является тороидальный резонатор из плавленого кварца [24]. В таком резонаторе оптические моды взаимодействуют с механическими модами посредством силы радиационного давления, вследствие чего происходит обмен энергией между оптической и механической модами.

Гамильтониан оптомеханической системы имеет следующий вид:

$$\hat{\mathcal{H}} = \hbar\omega_c \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{\hbar\omega_m}{2} (\hat{p}^2 + \hat{q}^2) - \hbar G_0 \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{q} + i\hbar E (e^{-i\omega_0 t} \hat{a}^\dagger - e^{i\omega_0 t} \hat{a}) + \hat{\mathcal{H}}_{\text{mech.dissipation}} + \hat{\mathcal{H}}_{\text{bath}}. \quad (1)$$

Первое слагаемое описывает оптическую моду резонатора, \hat{a}^\dagger, \hat{a} — операторы рождения и уничтожения квантов оптической моды соответственно ($[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$), ω_c — оптическая частота моды резонатора. Второе слагаемое описывает механическую моду, \hat{q} и \hat{p} — безразмерные операторы координаты и импульса зеркала ($[\hat{q}, \hat{p}] = i$). Третье слагаемое описывает взаимодействие оптической и механической мод посредством

светового давления, $G_0 = (\omega_c/L)\sqrt{\hbar/m\omega_m}$ — постоянная оптомеханического взаимодействия, m — эффективная масса механической моды, L — эффективная длина резонатора, которая в случае резонатора Фабри–Перо просто совпадает с его геометрической длиной, а в случае тороидального резонатора — с радиусом тороида. Четвертое слагаемое характеризует оптическую накачку с частотой ω_0 , $E = \sqrt{2P\kappa}/\hbar\omega_0$ — классическая амплитуда накачки, P — входная мощность, а κ — полуширина полосы пропускания резонатора. Мы используем одномодовое приближение для резонатора, поскольку свободный спектральный диапазон много больше механической частоты $FSR \sim \pi c/L \gg \omega_m$. Пятое слагаемое описывает механическую диссипацию, а $\hat{\mathcal{H}}_{\text{bath}}$ — гамильтониан термостатов (механического и оптического).

2. КВАНТОВЫЕ УРАВНЕНИЯ ЛАНЖЕВЕНА

Для описания квантовой динамики рассматриваемой системы с учетом диссипации мы записываем квантовые уравнения Ланжевена в представлении взаимодействия с $\hat{\mathcal{H}}_0 = \hbar\omega_0 \hat{a}^\dagger \hat{a}$:

$$\dot{\hat{q}} = \omega_m \hat{p}, \quad (2)$$

$$\dot{\hat{p}} = -\omega_m \hat{q} - \gamma_m \hat{p} + G_0 \hat{a}^\dagger \hat{a} + \hat{\xi}, \quad (3)$$

$$\dot{\hat{a}} = -(\kappa + i\Delta_0) \hat{a} + iG_0 \hat{a} \hat{q} + E + \sqrt{2\kappa} \hat{a}^{in}, \quad (4)$$

где $\Delta_0 = \omega_c - \omega_0$ — отстройка, γ_m — механические потери, $\hat{\xi}$ — случайная сила, соответствующая броуновскому шуму, \hat{a}^{in} — комплексная амплитуда флуктуаций оптического поля накачки, включающая квантовые флуктуации.

Для корреляционной функции \hat{a}^{in} можно записать следующее соотношение:

$$\langle \hat{a}^{in}(t) \hat{a}^{in,\dagger}(t') \rangle_{sym} = [N(\omega_c) + 1] \delta(t - t'), \quad (5)$$

$$\langle \hat{a}^{in,\dagger}(t) \hat{a}^{in}(t') \rangle_{sym} = N(\omega_c) \delta(t - t'), \quad (6)$$

где $N(\omega_c) = [\exp(\hbar\omega_c/k_B T_{opt}) - 1]^{-1}$ — среднее число тепловых фотонов. Для оптических частот справедливо $\hbar\omega_c/k_B T_{opt} \gg 1$ и выполняется $N(\omega_c) \simeq 0$, поэтому флуктуации входящего электромагнитного поля мы считаем сугубо квантовыми ($T_{opt} = 0$).

Корреляционная функция оператора броуновского шума $\hat{\xi}$ имеет вид:

$$\begin{aligned} \langle \hat{\xi}(t) \hat{\xi}(t') \rangle_{sym} &= \\ &= \frac{\gamma_m}{\omega_m} \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega(t-t')} \omega \left[\coth \left(\frac{\hbar\omega}{2k_B T} \right) + 1 \right], \end{aligned} \quad (7)$$

где k_B — постоянная Больцмана, T — температура механического термостата.

Как видно, корреляционная функция для случайной силы, действующей на механический осциллятор со стороны теплового термостата, не пропорциональна дельта-функции. В общем случае $\hat{\xi}(t)$ —

это немарковский случайный процесс. Однако в реальных экспериментальных системах имеют место следующие два условия. Во-первых, обычно температуры механического термостата достаточно высоки: $k_B T / \hbar \omega_m \gg 1$, что выполняется даже для криогенных температур. Во-вторых, механическую систему можно считать высокодобротной, то есть $Q_m = \omega_m / \gamma_m \gg 1$, что само по себе важно для экспериментов по наблюдению квантовых явлений. Благодаря этому, в этих двух случаях можно использовать марковское приближение для броуновского шума, и тогда его можно считать дельта-коррелированным:

$$\langle \hat{\xi}(t) \hat{\xi}(t') + \hat{\xi}(t') \hat{\xi}(t) \rangle / 2 \simeq \gamma_m (2n + 1) \delta(t - t'), \quad (8)$$

где

$$\bar{n} = \frac{1}{\exp\left(\frac{\hbar \omega_m}{k_B T}\right) - 1} \quad (9)$$

— среднее число тепловых квантов в осцилляторе.

3. ЛИНЕАРИЗОВАННЫЕ УРАВНЕНИЯ

Уравнения (2, 3, 4) достаточно сложно решать в силу их нелинейности. Однако они могут быть линеаризованы в приближении «сильной» накачки, когда классическая амплитуда $E \gg \langle \hat{a}^{in} \rangle$. Тогда среднее значение поля в резонаторе характеризуется некоторой классической амплитудой a_s ($|a_s| \gg 1$), а среднее значение координаты осциллятора q_s (где индекс s обозначает стационарное значение величины). Приравнивая все производные по времени из уравнений (10, 11, 12) к нулю, можно найти эти величины:

$$q_s = \frac{G_0 |a_s|^2}{\omega_m}, \quad (10)$$

$$a_s = \frac{E}{\kappa + i\Delta}, \quad (11)$$

$$\Delta = \Delta_0 - \frac{G_0^2 |a_s|^2}{\omega_m}, \quad (12)$$

где Δ — эффективная отстройка. Мы получили систему нелинейных алгебраических уравнений относительно q_s, a_s, Δ , которые всегда можно решить для определения параметров стационарного состояния.

Мы можем переписать наши операторы в картине Гейзенберга как сумму их значений в стационарных состояниях и добавочных операторов с нулевыми средними: $\hat{a} = a_s + \delta\hat{a}$, $\hat{q} = q_s + \delta\hat{q}$, $\hat{p} = p_s + \delta\hat{p}$. Эти выражения мы подставляем в наши квантовые уравнения Ланжевена (2, 3, 4) и получаем систему дифференциальных уравнений для флуктуирующих составляющих:

$$\delta\dot{\hat{q}} = \omega_m \delta\hat{p}, \quad (13)$$

$$\delta\dot{\hat{p}} = -\omega_m \delta\hat{q} - \gamma_m \delta\hat{p} + G_0 (a_s \delta\hat{a}^\dagger + a_s^* \delta\hat{a}) + \delta\hat{a}^\dagger \delta\hat{a} + \hat{\xi}, \quad (14)$$

$$\delta\dot{\hat{a}} = -(\kappa + i\Delta_0) \delta\hat{a} + iG_0 (a_s + \delta\hat{a}) \delta\hat{q} + \sqrt{2\kappa} \hat{Y}^{in}. \quad (15)$$

При достаточно большой оптической накачке (при большой входной мощности P , то есть когда $|a_s| \gg 1$) мы можем пренебречь нелинейными членами и линеаризовать наши уравнения:

$$\delta\dot{\hat{q}} = \omega_m \delta\hat{p}, \quad (16)$$

$$\delta\dot{\hat{p}} = -\omega_m \delta\hat{q} - \gamma_m \delta\hat{p} + G \delta\hat{X} + \hat{\xi}, \quad (17)$$

$$\delta\dot{\hat{X}} = -\kappa \delta\hat{X} + \Delta \delta\hat{Y} + \sqrt{2\kappa} \hat{X}^{in}, \quad (18)$$

$$\delta\dot{\hat{Y}} = -\kappa \delta\hat{Y} - \Delta \delta\hat{X} + G \delta\hat{q} + \sqrt{2\kappa} \hat{Y}^{in}, \quad (19)$$

где мы ввели эрмитовы операторы квадратур поля внутри резонатора $\delta\hat{X} = (\delta\hat{a} + \delta\hat{a}^\dagger) / \sqrt{2}$, $\delta\hat{Y} = (\delta\hat{a} - \delta\hat{a}^\dagger) / i\sqrt{2}$ и квадратур входящего поля $\hat{X}^{in} = (\hat{a}^{in} + \hat{a}^{in,\dagger}) / \sqrt{2}$, $\hat{Y}^{in} = (\hat{a}^{in} - \hat{a}^{in,\dagger}) / i\sqrt{2}$. При этом механическая мода связана с квадратурами поля резонатора посредством эффективной постоянной оптомеханического взаимодействия G :

$$G = G_0 a_s \sqrt{2} = \frac{2\omega_0}{L} \sqrt{\frac{P\kappa}{m\omega_m\omega_0(\kappa^2 + \Delta^2)}}. \quad (20)$$

Нетрудно показать, что оптомеханическая система эквивалентна системе двух связанных осцилляторов с диссипацией:

$$\delta\ddot{\hat{q}} + \gamma_m \delta\dot{\hat{q}} + \omega_m^2 \delta\hat{q} = \omega_m G \delta\hat{X} + \omega_m \hat{\xi}, \quad (21)$$

$$\begin{aligned} & \delta\ddot{\hat{X}} + 2\kappa \delta\dot{\hat{X}} + (\kappa^2 + \Delta^2) \delta\hat{X} = \\ & = G \Delta \delta\hat{q} + \sqrt{2\kappa} \hat{X}^{in} + \kappa \sqrt{2\kappa} \hat{X}^{in} + \Delta \sqrt{2\kappa} \hat{Y}^{in}. \end{aligned} \quad (22)$$

4. КОВАРИАЦИОННАЯ МАТРИЦА

Для решения системы уравнений (16, 17, 18, 19) введем следующие векторы:

$$\mathbf{u}(t) = \left\{ \delta\hat{q}(t), \delta\hat{p}(t), \delta\hat{X}(t), \delta\hat{Y}(t) \right\}^T \quad (23)$$

— вектор квадратурных флуктуаций,

$$\mathbf{n}(t) = \left\{ 0, \hat{\xi}(t), \sqrt{2\kappa} \hat{X}^{in}(t), \sqrt{2\kappa} \hat{Y}^{in}(t) \right\}^T \quad (24)$$

— вектор шумов.

Тогда уравнение эволюции системы примет следующий вид:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{u}(t) = \mathbb{A} \mathbf{u}(t) + \mathbf{n}(t). \quad (25)$$

В случае нашей задачи: $\mathbb{A}^\dagger = \mathbb{A}^T$ — это матрица, описывающая динамику системы:

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 0 & \omega_m & 0 & 0 \\ -\omega_m & -\gamma_m & G & 0 \\ 0 & 0 & -\kappa & \Delta \\ G & 0 & -\Delta & -\kappa \end{pmatrix}. \quad (26)$$

Решение векторного уравнения имеет вид:

$$\mathbf{u}(t) = \mathbb{M}(t)\mathbf{u}(0) + \int_0^t ds \mathbb{M}(s)\mathbf{n}(t-s), \quad (27)$$

где

$$\mathbb{M}(t) = \exp\{\mathbb{A}t\}. \quad (28)$$

Поскольку наша система гауссова, то ее состояние полностью характеризуется ковариационной матрицей, которая определяется следующим образом:

$$\mathbb{V}_{ij}(t) = \langle u_i(t)u_j(t) \rangle - \langle u_i(t) \rangle \langle u_j(t) \rangle, \quad (29)$$

$$\langle u_i(t)u_j(t) \rangle = \frac{1}{2} \langle u_i(t)u_j(t) + u_j(t)u_i(t) \rangle. \quad (30)$$

В нашем случае $\mathbb{V}_{ij}(t) = \langle u_i(t)u_j(t) \rangle_{sym}$, поскольку $\langle u_i(t) \rangle = 0 \forall i = 1, \dots, 4$.

Далее, для ковариационной матрицы нетрудно получить:

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(t) &= \mathbb{M}(t)\mathbb{V}(0)\mathbb{M}^T(t) + \\ &+ \int_0^t ds \int_0^t ds' \mathbb{M}(s)\Phi(s-s')\mathbb{M}^T(s), \end{aligned} \quad (31)$$

или иначе

$$\begin{aligned} \mathbb{V}_{ij}(t) &= \sum_{nm} \mathbb{M}_{in}(t)\mathbb{V}_{nm}(0)\mathbb{M}_{mj}(t) + \\ &+ \sum_{kl} \int_0^t ds \int_0^t ds' \mathbb{M}_{ik}(s)\Phi_{kl}(s-s')\mathbb{M}_{lj}(s), \end{aligned} \quad (32)$$

$$\Phi_{kl}(s-s') = \frac{1}{2} \langle n_k(s)n_l(s') + n_l(s')n_k(s) \rangle. \quad (33)$$

Учитывая, что $\langle \hat{X}^{in}(t)\hat{X}^{in}(t') + \hat{X}^{in}(t')\hat{X}^{in}(t) \rangle = \delta(t-t')$, $\langle \hat{Y}^{in}(t)\hat{Y}^{in}(t') + \hat{Y}^{in}(t')\hat{Y}^{in}(t) \rangle = \delta(t-t')$, можно получить:

$$\Phi_{kl}(s-s') = \mathbb{D}_{kl}\delta(s-s'), \quad (34)$$

$$\mathbb{D} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_m(2\bar{n}+1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \kappa & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \kappa \end{pmatrix}. \quad (35)$$

При этом уравнение для ковариационной матрицы принимает простой вид:

$$\mathbb{V}(t) = \mathbb{M}(t)\mathbb{V}(0)\mathbb{M}^T(t) + \int_0^t ds \mathbb{M}(s)\mathbb{D}\mathbb{M}^T(s). \quad (36)$$

Таким образом, используя полученную формулу (36), мы можем охарактеризовать состояние нашей системы в любой момент времени, то есть исследовать ее динамику.

Для стационарного состояния при $t \rightarrow \infty$ получаем следующие соотношения:

$$\mathbb{V}_\infty = \mathbb{V}(t \rightarrow \infty) = \int_0^\infty ds \mathbb{M}(s)\mathbb{D}\mathbb{M}^T(s). \quad (37)$$

5. УРАВНЕНИЕ ЛЯПУНОВА ДЛЯ КОВАРИАЦИОННОЙ МАТРИЦЫ

Рассмотрим также другой подход для нахождения ковариационной матрицы. Посчитаем от нее производную:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\mathbb{V}_{ij}(t) &= \frac{d}{dt} (\langle \mathbf{u}_i(t)\mathbf{u}_j(t) \rangle_{sym}) = \\ &= \langle \frac{d}{dt} [\mathbf{u}_i(t)] \mathbf{u}_j(t) \rangle_{sym} + \langle \mathbf{u}_i(t) \frac{d}{dt} [\mathbf{u}_j(t)] \rangle_{sym} = \\ &= \sum_n \mathbb{A}_{in} \langle \mathbf{u}_n(t)\mathbf{u}_j(t) \rangle_{sym} + \langle \mathbf{n}_i(t)\mathbf{u}_j(t) \rangle_{sym} + \\ &+ \sum_m \langle \mathbf{u}_i(t)\mathbf{u}_m(t) \rangle_{sym} \mathbb{A}_{mj} + \langle \mathbf{u}_i(t)\mathbf{n}_j(t) \rangle_{sym} = \\ &= \sum_n \mathbb{A}_{in}\mathbb{V}_{nj} + \sum_m \mathbb{V}_{im}\mathbb{A}_{mj} + \mathbb{D}_{ij} \end{aligned} \quad (38)$$

Полученное уравнение можно записать в матричном виде:

$$\dot{\mathbb{V}} = \mathbb{A}\mathbb{V} + \mathbb{V}\mathbb{A}^T + \mathbb{D} \quad (39)$$

Это — матричное уравнение Ляпунова. Для нашего случая оно соответствует системе 10 дифференциальных уравнений, решая которые можно получить выражения для членов ковариационной матрицы. Но в этом нет необходимости, так как в предыдущем разделе мы получили формулу для ковариационной матрицы (36).

Данное уравнение удобно использовать для анализа стационарного состояния, что соответствует условию $\dot{\mathbb{V}} = 0$. Система достигает стационарного состояния только тогда, когда $\mathbb{M}(\infty) = 0$, то есть когда действительные части всех собственных значений матрицы \mathbb{A} отрицательны. При удовлетворении условия для стационарного состояния $\mathbb{M}(\infty) = 0$ можно получить уравнение для ковариационной матрицы стационарного состояния:

$$\mathbb{A}\mathbb{V} + \mathbb{V}\mathbb{A}^T = -\mathbb{D} \quad (40)$$

Это матричное уравнение Ляпунова для стационарного состояния. В нашем случае оно соответствует системе 10 линейных алгебраических уравнений. Решение легко находится, но сами выражения для членов ковариационной матрицы достаточно громоздки.

6. НАЧАЛЬНОЕ СОСТОЯНИЕ

В качестве начального значения $\mathbb{V}(0)$ берем ковариационную матрицу двухмодового сжатого состояния с коэффициентами сжатия r_1, r_2 и взаимным углом сжатия λ :

$$|\psi\rangle = |Sq_1(r_1, 0)\rangle \otimes |Sq_2(r_2, \lambda)\rangle, \quad (41)$$

$$\mathbb{V}(0) = \begin{pmatrix} S(r_1, 0) & 0 \\ 0 & S(r_2, \lambda) \end{pmatrix}, \quad (42)$$

где

$$\begin{aligned} S(r, \lambda) &\equiv \\ &\equiv \begin{pmatrix} \cosh 2r - \sinh 2r \cos 2\lambda & \sinh 2r \sin 2\lambda \\ \sinh 2r \sin 2\lambda & \cosh 2r + \sinh 2r \cos 2\lambda \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (43)$$

Очевидно, что это состояние не является запутанным, поскольку представлено в факторизованном виде.

7. ЛОГАРИФИЧЕСКАЯ ОТРИЦАТЕЛЬНЬ

В области квантовой информации запутанность является ценным физическим ресурсом, который необходимо измерять, как энергию или энтропию. В данной работе мы будем использовать удобную и легко вычисляемую меру запутанности, называемую *логарифмической отрицательностью* [3], $E_N(\hat{\rho}(t))$. Для гауссовых состояний её можно рассчитать, зная ковариационную матрицу:

$$\mathbb{V} = \begin{pmatrix} \mathbb{V}_A & \mathbb{V}_C \\ \mathbb{V}_C^T & \mathbb{V}_B \end{pmatrix}, \quad (44)$$

где

$$\mathbb{V}_A = \begin{pmatrix} \langle \delta \hat{q}^2 \rangle_{sym} & \langle \delta \hat{q} \circ \delta \hat{p} \rangle_{sym} \\ \langle \delta \hat{q} \circ \delta \hat{p} \rangle_{sym} & \langle \delta \hat{p}^2 \rangle_{sym} \end{pmatrix}, \quad (45)$$

$$\mathbb{V}_B = \begin{pmatrix} \langle \delta \hat{X}^2 \rangle_{sym} & \langle \delta \hat{X} \circ \delta \hat{Y} \rangle_{sym} \\ \langle \delta \hat{X} \circ \delta \hat{Y} \rangle_{sym} & \langle \delta \hat{Y}^2 \rangle_{sym} \end{pmatrix}, \quad (46)$$

$$\mathbb{V}_C = \begin{pmatrix} \langle \delta \hat{q} \circ \delta \hat{X} \rangle_{sym} & \langle \delta \hat{q} \circ \delta \hat{Y} \rangle_{sym} \\ \langle \delta \hat{p} \circ \delta \hat{X} \rangle_{sym} & \langle \delta \hat{p} \circ \delta \hat{Y} \rangle_{sym} \end{pmatrix}. \quad (47)$$

Тогда логарифмическая отрицательность вычисляется по простой формуле [3]:

$$E_N = \max \left[-\ln \sqrt{\frac{\Sigma - \sqrt{\Sigma^2 - 4 \text{Det } \mathbb{V}}}{2}}, 0 \right], \quad (48)$$

где

$$\Sigma = \text{Det } \mathbb{V}_A + \text{Det } \mathbb{V}_B - 2 \text{Det } \mathbb{V}_C. \quad (49)$$

Мы знаем ковариационную матрицу для любого момента времени. Таким образом, вычисляя логарифмическую отрицательность, мы можем изучить динамику квантовой запутанности.

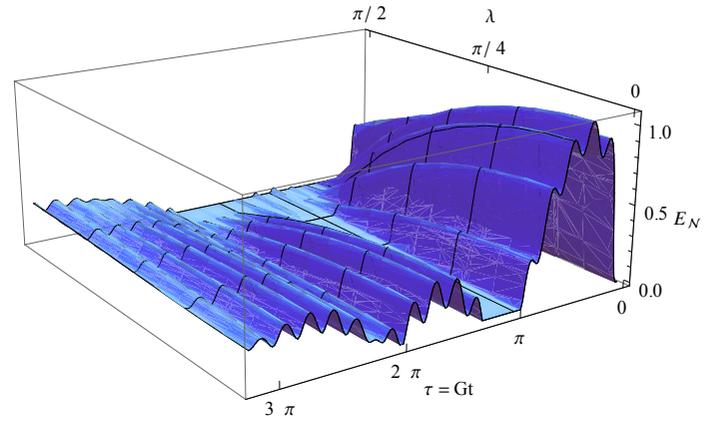


Рис. 1: График зависимости логарифмической отрицательности от времени $\tau = Gt$ и угла сжатия начальных состояний, сжатие -10 дБ, $T = 20$ мК, $\bar{n} = 417$

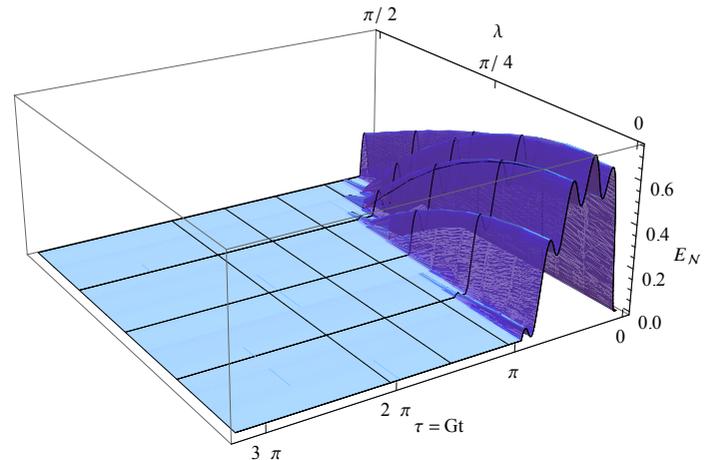


Рис. 2: График зависимости логарифмической отрицательности от времени $\tau = Gt$ и угла сжатия начальных состояний, сжатие -10 дБ, $T = 50$ мК, $\bar{n} = 1045$

8. РЕЗУЛЬТАТЫ

Нами проанализирована зависимость динамического поведения логарифмической отрицательности от величины потерь в системе, температуры, при которой находится система, и других характеристических параметров системы, а также от параметров начального состояния (см. табл. 1). Они соответствуют параметрам из статьи [25], в которой рассматривалась аналогичная оптомеханическая система, и являются экспериментально достижимыми.

Из наших вычислений следует, что логарифмиче-

Таблица 1: Характеристические параметры системы

Температура механического термостата	$T_m = 20$ мК
Масса механического осциллятора	$m = 5$ нг
Механическая частота	$\omega_m/2\pi = 1$ МГц
Механическая добротность	$Q_m = 10^4$
Оптическая частота	$\omega_o = 1.77 \times 10^{15}$ с ⁻¹
Температура оптического термостата	$T_{opt} = 0$ К
Эффективная отстройка	$\Delta = \omega_m$
Резкость	$F = 10^5$
Длина резонатора Фабри-Перо	$L = 10$ см
Полоса пропускания	$\kappa = 4.7 \times 10^5$ с ⁻¹
Входная мощность	$P = 50$ мкВт
Среднее число тепловых квантов	$\bar{n} = 417$
Частота биений	$G = 1.2 \times 10^6$ с ⁻¹

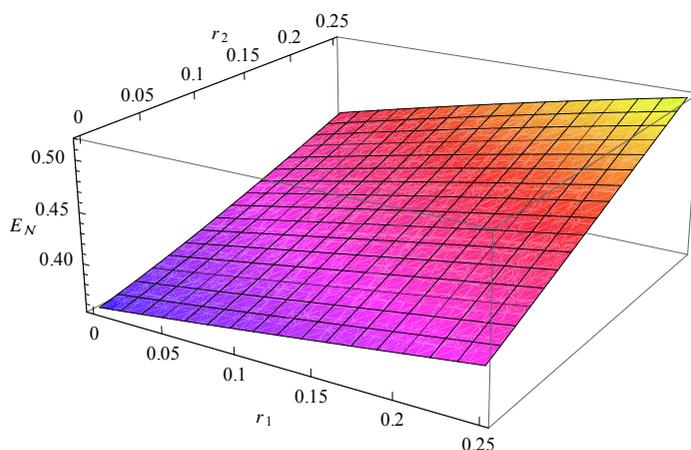


Рис. 3: График зависимости логарифмической отрицательности от коэффициентов сжатия начального состояния при $\tau = \pi/4$, $T = 20$ мК, $\bar{n} = 417$

ская отрицательность сложным образом зависит от времени. В отсутствие диссипации запутанность в рассматриваемой системе осциллирует с периодом, равным удвоенному периоду биений $2G$ в системе связанных осцилляторов. При этом присутствуют осцилляции на частоте механической подсистемы ω_m . При наличии затухания запутанность уменьшается с течением времени. Однако мы видим, что при определенных параметрах возможно существование стационарной запутанности (см. рис. 1), то есть запутанность может сохраняться сколь угодно долгое время. Это результат особенно важен с экспериментальной точки зрения.

Однако возможна ситуация, когда стационарной запутанности в системе не будет, но при этом запутанное состояние будет существовать в течении неко-

торого времени (см. рис. 2). Для этого случая мы оценили время «выживания» запутанного состояния $t^* \sim \tau^*/G \sim 1$ мкс.

Мы получили, что система чрезвычайно чувствительна к температуре. Это согласуется с критерием квантовости, введенным В.Б.Брагинским [26]: при температурных флуктуациях на уровне квантовых флуктуаций основного состояния проявляются квантовые свойства системы. При увеличении температуры эффекты декогеренции сильно маскируют квантовые эффекты в системе.

Запутанность в системе убывает с увеличением взаимного угла сжатия начального состояния. Оптимально выбирать $\lambda = 0$.

На рис. 3 приведена зависимость логарифмической отрицательности от параметров начального сжатия системы в фиксированный момент времени $\tau = \pi/4$. Запутанность монотонно возрастает с ростом параметров сжатия r_1 и r_2 , поэтому желательно готовить систему в максимально сжатом состоянии. Сжатие, равное 10 Дб, которое было нами рассмотрено, на сегодняшний день экспериментально осуществимо.

Стационарная запутанность не зависит от параметров начального состояния системы.

9. «ENTANGLEMENT SUDDEN DEATH» И «ENTANGLEMENT SUDDEN REVIVAL»

В системе с непрерывным спектром впервые наблюдаются интересные явления, известные для систем с дискретным спектром (кубитов) как «*entanglement sudden death*» (ESD) [27] и «*entanglement sudden revival*» (ESR) [28].

Эффект состоит в следующем. Две подсистемы, будучи запутанными, через некоторое время становятся незапутанными, а впоследствии, взаимодействуя тем

же образом, становятся вновь запутанными, причем запутанность сохраняется сколь угодно долгое время (см. рис. 1). Парадоксальность эффекта состоит в том, что в течение всего времени осцилляторы взаимодействуют одинаково, гамильтониан системы не меняется, однако на определенный момент времени они «распутываются».

Мы же показали, что этот эффект является результатом динамической эволюции системы, а не каких-то её специфических квантовых свойств.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Сделанные оценки позволяют нам говорить о возможности достижения соответствующих оптималь-

ных параметров для экспериментального приготовления квантовых осцилляторов в запутанном состоянии. В качестве таких осцилляторов могут выступать эффективная мода в резонаторе Фабри–Перо и одно из подвижных зеркал. При определенных параметрах в системе возможно приготовить стационарную запутанность. Таким образом мы получим реализацию запутанности для оптомеханической системы.

Важным результатом явилось то, что впервые для системы с непрерывным спектром наблюдаются явления «*entanglement sudden death*» (ESD) и «*entanglement sudden revival*» (ESR).

-
- [1] Advanced LIGO project webpage, <http://www.advancedligo.mit.edu/>
- [2] *Einstein A., Podolsky B., and Rosen N.* Phys. Rev. **47**, 777 (1935).
- [3] *Vidal G., Werner R. F.* Phys. Rev. A **65**, 032314 (2002).
- [4] *O’Connell A. N. et al.* Nature, **464**, 697-703 (2010).
- [5] *Miao H., Danilishin, S. and Chen Y.* Phys. Rev. A. **81**, 052307 (2010).
- [6] *Abbott B. et al.* New Journal of Physics **11**, 073032 (2009).
- [7] *Cohadon P. F., Heidmann A., and Pinard M.* Phys. Rev. Lett. **83**, 3174 (1999).
- [8] *Naik A. et al.*, Nature **443**, 193 (2006).
- [9] *Corbitt T. et al.* Phys. Rev. Lett. **99**, 160801 (2007).
- [10] *Gigan S. et al.* Nature **444**, 67 (2006).
- [11] *Arcizet O. et al.* Nature **444**, 71 (2006).
- [12] *Kleckner D. Bouwmeester, D.* Nature **444**, 75 (2006).
- [13] *Mow-Lowry C. M. et al.* Phys. Rev. Lett. **100**, 010801 (2008).
- [14] *Hopkins A. et al.* Phys. Rev. B **68**, 235328 (2003).
- [15] *Mueller F., Heugel S., Wang L. J.* Appl. Phys. Lett. **92**, 044101 (2008).
- [16] *Jayich A. M. et al.* New Journal of Physics **10**, 095008 (2008).
- [17] *Kleckner D. et al.* New Journal of Physics **10**, 095020 (2008).
- [18] *Rocheleau T. et al.* Nature **463**, 72 (2009).
- [19] *Thompson J. D. et al.* Nature **452**, 72-75 (2008).
- [20] *Yamamoto K. et al.* Phys. Rev. A **81**, 033849 (2010).
- [21] *Müller-Ebhardt H. et al.* Phys. Rev. A **80**, 043802 (2009).
- [22] *Müller-Ebhardt H. et al.* Phys. Rev. Lett. **100**, 013601 (2008).
- [23] *Miao H. et al.* Phys. Rev. A. **81**, 012114 (2010).
- [24] *Городецкий М. Л.* Оптические микрорезонаторы с гигантской добротностью. (М.: Физматлит, 2010).
- [25] *Vitali D. et al.* Phys. Rev. Lett. **98**, 030405 (2007).
- [26] *Бразинский В. Б.* Физические эксперименты с пробными телами. (М.: Наука, 1970).
- [27] *Yu Ting, Eberly J. H.* Phys. Rev. Lett. **93**, 140404 (2004).
- [28] *Ficek Z., Tanas R.* Phys. Rev. A **74**, 024304 (2006).
- [29] *Paternostro M. et al.* Phys. Rev. Lett. **99**, 250401 (2007).
- [30] *Barzanjeh Sh. et al.* Phys. Rev. A **84**, 042342 (2011).
- [31] *Abdi M. et al.* Phys. Rev. A **84**, 032325 (2011).
- [32] *Biancofiore C. et al.* Phys. Rev. A **84**, 033814 (2011).
- [33] *Genes C. et al.* Phys. Rev. A **78**, 032316 (2008).

Dynamics of quantum entanglement in optomechanical systems with dissipation

O. M. Kiriukhin^{1a}, S. L. Danilishin^{2b}

¹*Department of Physics of Oscillations, Faculty of Physics, M.V.Lomonosov Moscow State University, Russia, 119991, Moscow, GSP-1, 1-2 Leninskiye Gory.*

²*School of Physics, University of Western Australia, 35 Stirling Highway, Crawley 6009, WA, Australia.
E-mail: ^akiryukhin@physics.msu.ru, ^bshtefan.danilishin@uwa.edu.au.*

Modern gravitational-wave detectors and other optomechanical devices should reach such sensitivity, that it would be possible to observe quantum phenomena with macroscopic quantum objects [1]. One of the most interesting experimental projects in this area of fundamental physics is the proof of the Einstein-Podolsky-Rosen paradox in its initial interpretation, that is for coordinate and momentum of macroscopic mechanical objects [2].

We study dynamics of quantum entanglement and possibility of its observation in optomechanical systems. For such systems we calculate logarithmic negativity [3], one of the most popular entanglement measures, as a function of time. This measure characterizes the dynamics of quantum entanglement in a system with dissipation. We show that

quantum entanglement is a result of dynamics of the system and at certain parameters it can persist for an infinitely long time. The results show that it is possible to use optomechanical systems for creating quantum memory.

PACS: 42.50.Dv, 03.65.Ta, 03.67.Mn.

Keywords: quantum entanglement, optomechanical systems, logarithmic negativity, EPR paradox.

Received 10 May 2012.

Сведения об авторах

1. Олег Михайлович Кирюхин — бакалавр физики, магистрант 1-го года обучения; тел.: +7 (495) 939-12-24, e-mail: kiryukhin@physics.msu.ru.
 2. Стефан Леонтьевич Данилишин — канд. физ.-мат. наук, научный сотрудник; тел.: (+61 8) 6488 1826, e-mail: shtefan.danilishin@uwa.edu.au.
-